

Table des matières

I	Logique	3
1	Logique propositionnelle	3
1.1	Un monde binaire	3
1.2	Syntaxe	3
1.3	Sémantique — Les tables de vérité	3
1.4	Exercices	4
2	Logique du premier ordre et techniques de preuves	6
2.1	Les quantificateurs	6
2.2	Prouver qu'une formule quantifiée est vraie	6
2.3	La preuve par induction (ou récurrence)	7
2.3.1	Principe de preuve par induction faible	7
2.3.2	Induction forte	7
2.4	Prouver qu'une formule quantifiée est fausse	7
2.5	Autres techniques de preuve	8
2.5.1	Preuve par contraposée	8
2.5.2	Preuve par l'absurde	8
2.6	Exercices	8
3	Introduction aux probabilités	14
3.1	Au delà du monde binaire	14
3.2	La probabilité d'événements combinés	15
3.3	Combinaisons et triangle de Pascal	16
3.4	Exercices	17
II	Fonctions et inéquations	22
4	Notions de base	22
4.1	Ordre sur \mathbb{R} et intervalles	22

4.2	Fonctions monotones	23
4.3	Fonctions affines	24
4.4	Valeur absolue	24
4.5	Polynôme du second degré	25
4.6	Fonctions de base	25
4.7	Inéquations	26
5	Exercices	26
 III Éléments d’algèbre linéaire		 33
6	Optimisation linéaire	33
6.1	Notions de base	34
6.2	Optimiser une fonction	36
6.3	Exercices	40
7	Droites et plans	41
7.1	Exercices	42
8	Systèmes linéaires	43
8.1	Calcul matriciel	43
8.2	Exercices	47
8.3	Transformations élémentaires	48
8.4	Exercices	54
8.5	Inverse d’une matrice	54
8.6	Exercices	58
8.7	Déterminants	58
8.8	Exercices	61
8.9	Systèmes de Cramer	62
8.10	Exercices	67

I. Logique

1 Logique propositionnelle

1.1 Un monde binaire

Définition 1. Une **proposition (atomique)** est une phrase déclarative qui est soit vraie, soit fausse (mais pas les deux à la fois). Quand on parlera d'une proposition de façon abstraite, on la notera P ou Q, \dots mais parfois aussi p, q, \dots

1.2 Syntaxe

Définition 2. Les **formules (de la logique propositionnelle)** sont définies par induction. Quand on parlera d'une formule de façon abstraite, on la notera φ, ψ, \dots

- (1) **Formules de base :** Une proposition atomique p est une formule.
- (2) **Formules générales ou règles pour construire des formules plus complexes :**
Si φ, φ_1 et φ_2 sont des formules, on peut construire les formules suivantes :
 - (a) $\neg\varphi$ est appelée la **négation** et est lue « non φ ».
 - (b) $\varphi_1 \vee \varphi_2$ est appelée la **disjonction** et est lue « φ_1 **ou** φ_2 ».
 - (c) $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ est appelée la **conjonction** et est lue « φ_1 **et** φ_2 ».
 - (d) $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ est appelée l'**implication** et est lue « **si** φ_1 **alors** φ_2 ».
 - (e) $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ est appelée l'**équivalence** et est lue « φ_1 **si et seulement si** φ_2 ».

En plus des symboles de propositions (P, Q, \dots), et des symboles de **connecteurs logiques** ($\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ et \Leftrightarrow), des parenthèses peuvent être utilisées pour écrire les formules de la logique propositionnelle.

1.3 Sémantique — Les tables de vérité

Le but de la sémantique de la logique propositionnelle est d'associer à chaque formule la valeur **vrai**, notée 1 ou la valeur **faux**, notée 0. Pour une formule φ (plus complexe) on utilise les **tables de vérité** pour définir la valeur de vérité de φ . Une table est associée à chacun des connecteurs logiques.

P	$\neg P$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Définition 3. Tautologie Une formule est une **tautologie** si elle est toujours vraie (quelles que soient les valeurs des propositions qui la composent).

Définition 4. Equivalence entre deux formules Deux formules φ_1 et φ_2 sont dites **équivalentes** si et seulement si la formule $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ est une tautologie. Dans ce cas, on note alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Définition 5. Contraposée La **contraposée** de la formule $P \Rightarrow Q$ est la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Définition 6. Réciproque La **réciproque** de la formule $P \Rightarrow Q$ est la formule $Q \Rightarrow P$.

1.4 Exercices

Exercice I.7. Déterminez si les phrases suivantes sont des propositions.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (1) Paris est la capitale du Liban. | (5) $1 + 1 = 3$. |
| (2) Ferme la bouche quand tu manges ! | (6) $x + 2 < 0$. |
| (3) Tous les nombres premiers sont impairs. | (7) Quelle heure est-il ? |
| (4) Le cassoulet est un plat délicieux. | (8) Aujourd'hui, il fait très chaud. |

Exercice I.8. Déterminez si les phrases suivantes sont des formules.

- | | | |
|---|------------------------------|--------------------------------|
| (1) $(P \vee Q) \wedge (R \Rightarrow S)$. | (3) $P \neg \vee \wedge Q$. | (5) $P \neg Q$. |
| (2) $\neg(\neg P)$. | (4) $\Rightarrow PQ$ | (6) $\neg P \Leftrightarrow P$ |

Exercice I.9. On note P : « je suis riche » et Q : « je suis heureux ».

- (1) Traduisez les formules suivantes en français.
- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $P \wedge \neg Q$. | (b) $Q \Rightarrow P$. | (c) $\neg P \Rightarrow \neg Q$. | (d) $Q \Leftrightarrow \neg P$. |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
- (2) Traduisez les phrases suivantes en formules.
- (a) Je suis riche et je ne suis pas heureux.
- (b) Si je suis heureux alors je ne suis pas riche.

Exercice I.10. Associer la valeur de vérité correcte à chaque proposition de l'exercice I.21.

Exercice I.11. Donnez la table de vérité des formules suivantes :

- | | |
|--|---|
| (1) $P_1 \wedge \neg P_2$ | (4) $(\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2)$. |
| (2) $(P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_1 \Rightarrow P_2)$ | (5) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ |
| (3) $\neg(P_1 \Rightarrow P_2)$. | (6) $(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1)$. |

Exercice I.12. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- (1) La formule $P \vee \neg P$ est une tautologie.
- (2) La formule $\neg(P \vee Q)$ est équivalente à la formule $\neg P \vee \neg Q$.
- (3) La formule $\neg(P \vee Q)$ est équivalente à la formule $\neg P \wedge \neg Q$.
- (4) La formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.
- (5) La formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa réciproque.
- (6) La négation de la formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- (7) La négation de la formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la formule $P \wedge \neg Q$.

Exercice I.13. Donnez en français la négation des phrases suivantes.

- (1) Je suis riche et je suis heureux.
- (2) Si je suis riche alors je suis heureux.

Exercice I.14. Donnez en français la contraposée des phrases suivantes.

- (1) Si je suis riche alors je suis heureux.
- (2) Si je ne suis pas riche alors je suis heureux.

Exercice I.15 (Quelques équivalences importantes). Prouvez les équivalences suivantes :

- | | |
|---|--|
| (1) $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ | (4) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ |
| (2) $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ | (5) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ |
| (3) $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ | (6) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ |

2 Logique du premier ordre et techniques de preuves

2.1 Les quantificateurs

Définition 16. Un **prédicat** est une proposition paramétrée par une (ou plusieurs) variable(s). Quand on parlera d'une prédicat de façon abstraite, on la notera par exemple $P(x)$, s'il ne dépend que de la seule variable x , ou encore $Q(x,y)$, s'il dépend des deux variables x et y .

Définition 17. On introduit deux quantificateurs :

- (1) le **quantificateur existentiel**, noté \exists , et lu « il existe (au moins un) ».
- (2) le **quantificateur universel**, noté \forall , et lu « pour tout » ou « quel que soit ».

Les **formules (de la logique du premier ordre)** peuvent (comme pour les formules de la logique propositionnelle) être définie formellement par induction. Nous ne le ferons pas ici. Elles sont construites sur base des prédicats, des connecteurs logiques (\neg , \vee , \wedge , \Rightarrow et \Leftrightarrow), et des quantificateurs. Des parenthèses peuvent être utilisées pour écrire les formules de la logique propositionnelle.

Exemple 18. Ci-dessous des exemples de formules de la logique du premier ordre.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) $\exists x x \leq 3$. | (4) $\exists x (x \geq 2) \wedge (x \leq 1)$. |
| (2) $\forall y y \geq 7$. | (5) $(\exists x x \geq 2) \wedge (\exists x x \leq 1)$. |
| (3) $\forall a \exists b a \geq b$. | (6) $\forall x (x \geq 0) \Rightarrow (\exists y x = y^2)$. |

2.2 Prouver qu'une formule quantifiée est vraie

Définition 19. Soit $P(x)$ un prédicat. Le **domaine** (ou **univers**) de $P(x)$ est l'ensemble (noté D) des valeurs que peut prendre la variable x .

Dans le cas d'un prédicat à plusieurs variables $P(x_1, \dots, x_n)$, si chaque variable x_i peut prendre ses valeurs dans l'ensemble D_i (pour $i = 1, \dots, n$), le domaine de $P(x_1, \dots, x_n)$ sera l'ensemble $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$.

Le but de la sémantique de la logique du premier ordre est d'associer à chaque formule (sans variable libre) la valeur **vrai**, notée 1 ou la valeur **faux**, notée 0. La sémantique d'un prédicat $P(x)$, de domaine A , est donnée via une fonction $P : D \rightarrow \{0, 1\}$, qui associe à chaque élément du domaine A une valeur de vérité qui est soit 1 (**vrai**), soit 0 (**faux**). Dans le cas d'un prédicat à plusieurs variables $P(x_1, \dots, x_n)$, de domaine $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$, la sémantique est donnée via une fonction $P : D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow \{0, 1\}$.

Soit $P(x)$ un prédicat de domaine D .

(1) La formule $\forall x P(x)$ est **vraie** si et seulement si pour tout $a \in D$, on a $P(a) = 1$.

(2) La formule $\exists x P(x)$ est **vraie** si et seulement si il existe $a \in D$, on a $P(a) = 1$.

Afin d'expliciter le domaine du prédicat, on écrit

(1) $\forall x \in D P(x)$, au lieu de $\forall x P(x)$;

(2) $\exists x \in D P(x)$, au lieu de $\exists x P(x)$.

2.3 La preuve par induction (ou récurrence)

La preuve par induction (ou récurrence) est une technique de preuve qui permet de prouver qu'une formule du type $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ est vraie.

2.3.1 Principe de preuve par induction faible

Objectif : Prouver que la formule $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ est vraie.

Méthode : Preuve par induction (faible)

(1) **Cas de base :** On prouve que $P(0)$ est vraie.

(2) **Cas général :** On prouve que $\forall k \in \mathbb{N} (P(k) \Rightarrow P(k+1))$

On déduit des deux étapes précédentes que $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ est vraie.

2.3.2 Induction forte

Objectif : Prouver que la formule $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ est vraie.

Méthode : Preuve par induction (forte)

(1) **Cas de base :** On prouve que $P(0)$ est vraie.

(2) **Cas général :** On prouve que $\forall k \in \mathbb{N} (P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1))$

On déduit des deux étapes précédentes que $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ est vraie.

2.4 Prouver qu'une formule quantifiée est fausse

Objectif : Prouver que la formule φ est fausse.

Méthode : On prouve que la formule $\neg\varphi$ est vraie.

On déduit de l'étape précédente que φ est fausse.

Définition 20. Négation des quantificateurs

(1) $\neg(\forall x P(x))$ est équivalente à $\exists x \neg P(x)$.

(2) $\neg(\exists x P(x))$ est équivalente à $\forall x \neg P(x)$.

2.5 Autres techniques de preuve

2.5.1 Preuve par contraposée

Objectif : Prouver que la formule $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Méthode : Preuve par contraposée

(1) On prouve que la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie.

On déduit de l'étape précédente que $P \Rightarrow Q$ est vraie.

2.5.2 Preuve par l'absurde

Objectif : Prouver que la formule φ est vraie.

Méthode : Preuve par l'absurde

(1) On nie la formule φ , c'est-à-dire que l'on considère la formule $\neg\varphi$.

(2) On montre que supposer que la formule $\neg\varphi$ conduit à une absurdité (par exemple $2 = 5$).

De façon formelle, on prouve que la formule $\neg\varphi \Rightarrow 0$ est vraie.

On déduit des étapes précédentes que la formule φ est vraie.

2.6 Exercices

Exercice I.21. Déterminez si les phrases suivantes sont des prédicats.

(1) L'ordinateur numéro x est en panne.

(3) Le plus joli nombre du monde est n .

(2) L'ordinateur numéro x est-il en panne ?

(4) $x + 2 < 0$.

Exercice I.22. Traduisez les phrases suivantes en formule.

- (1) Il existe un nombre réel strictement inférieur à 4.
- (2) Tous les nombres entiers sont négatifs.
- (3) Il existe un nombre plus grand que tous les autres nombres.
- (4) Quel que soit un nombre, il existe un nombre strictement plus grand.
- (5) Tout nombre réel est un carré.
- (6) Quel que soit un nombre réel, si ce nombre est positif, alors c'est un carré.

Exercice I.23. On note $P(a, b)$, le prédicat qui se lit « la clef a ouvre le coffre-fort b ».

(1) Traduisez les formules suivantes en français.

(a) $\exists a \forall b P(a, b)$. (b) $\forall a \exists b P(a, b)$. (c) $\forall a \forall b P(a, b)$.

(2) Traduisez les phrases suivantes en formules.

- (a) Il existe une clef qui ouvre tous les coffres forts.
- (b) Il existe un coffre fort qui ne peut être ouvert par aucune clef.

Exercice I.24. Prouvez que les formules suivantes sont vraies.

- (1) $\exists a \in \mathbb{N} \quad a > 25$.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < x + 1$.
- (3) $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x = 1) \Rightarrow (2 = 1)$.
- (4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (4 < 2) \Rightarrow (x > 0)$.
- (5) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x = y^2$.
- (6) $\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$.
- (7) $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad ab = 0$.
- (8) $\forall a \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exercice I.25. Dans cet exercice, on introduit une notation importante (notation sommatoire) qui sera utilisée dans la suite.

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Calculez les valeurs des sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^3 1$, (b) $\sum_{k=0}^3 1$, (c) $\sum_{k=1}^3 k$, (d) $\sum_{k=3}^5 1$, (e) $\sum_{k=0}^3 k^2$, (f) $\sum_{k=1}^3 (k + 1)$,

Exercice I.26. On note $P(n)$ le prédicat $\sum_{j=1}^n j^3 = n^2 + n - 1$. Donnez le prédicat $P(k + 1)$.

Exercice I.27. On note $P(n)$ le prédicat $\sum_{j=1}^n j^2 = n^3$. Donnez les prédicat $P(k+1)$ et $P(j)$.

Exercice I.28. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice I.29. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2.$$

Exercice I.30. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{j=0}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice I.31. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n < 2^n$.

Exercice I.32. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 4$, alors on a $2^n < n!$.

Exercice I.33. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Exercice I.34. Prouvez, par induction, que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 .

Exercice I.35. Une machine distribue des timbres de 3 Euros et de 5 Euros. Prouvez, par induction, que cette machine peut distribuer en timbres n'importe quelle valeur $n \geq 8$.

Exercice I.36. Quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Exercice I.37. Donnez la négation des formules suivantes.

- (1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2 + 1 \neq 0.$ (4) $\forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists b \in \mathbb{Q} \quad a + b = 0.$
 (2) $\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 < x.$ (5) $\exists a \in \mathbb{Z} \quad \forall b \in \mathbb{Z} \quad a^2 = b^2.$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y < x - y.$ (6) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad a + b + c = 0.$

Exercice I.38. Donnez en français correct, la négation de la phrase suivante : « *Quel que soit n un naturel, si n est pair alors $n + 1$ est impair* ».

Exercice I.39. Prouvez que les formules suivantes sont fausses.

- (1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a < 37.$ (4) $\forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists b \in \mathbb{Q} \quad ab = 1.$
 (2) $\exists x \in \mathbb{N} \quad x > x + 1.$ (5) $\exists a \in \mathbb{Z} \quad \forall b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b.$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2.$ (6) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^2 \neq a^2 + b^2.$

Exercice I.40. Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

- (1) $\exists a \in \mathbb{N} \quad a^2 + 2a + 1 = 0.$ (5) $\exists a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a + b = 7.$
 (2) $\exists a \in \mathbb{Z} \quad a^2 + 2a + 1 = 0.$ (6) $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists b \in \mathbb{Z} \quad b < a.$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = x^2.$ (7) $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad a < b.$
 (4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq x^2.$ (8) $\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad (a < b) \Rightarrow (a^2 = b^2).$

Exercice I.41. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- (1) Il existe un nombre réel strictement supérieur à son carré.
 (2) Tous les naturels strictement négatifs sont pairs.
 (3) Tous les chiens qui volent crachent du feu.

Exercice I.42. Vous trouverez ci-dessous une proposition et sa preuve. Qu'en pensez-vous ?

Proposition : L'affirmation $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 1 = 0$ est vraie.

Preuve :

Pour prouver que l'affirmation est vraie, nous allons prouver que sa négation est fausse.

La négation de la formule $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 1 = 0$ est la formule $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 1 \neq 0$.

Pour montrer que cette formule est fausse, on choisit $n = 2$.

On bien que $2 \in \mathbb{N}$ et $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

La négation de l'affirmation est donc fausse, et donc l'affirmation est vraie.

Exercice I.43. Vous trouverez ci-dessous une proposition et sa preuve. Qu'en pensez-vous ?

Proposition : L'affirmation $\exists n \in \mathbb{N} \ n^2 + 1 = 0$ est fausse.

Preuve :

Pour prouver que l'affirmation est fausse, nous allons prouver que sa négation est vraie.

La négation de la formule $\exists n \in \mathbb{N} \ n^2 + 1 = 0$ est la formule $\forall n \in \mathbb{N} \ n^2 + 1 \neq 0$.

Pour montrer que cette formule est vraie, on choisit $n = 2$.

On bien que $2 \in \mathbb{N}$ et $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

La négation de l'affirmation est donc vraie, et donc l'affirmation est fausse.

Exercice I.44. Prouvez que quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a est un multiple de 4, alors a est pair.

Exercice I.45. Prouvez que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Exercice I.46. Prouvez que quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a est pair, alors a^2 est pair.

Exercice I.47. Prouvez, à l'aide de la contraposée, que quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a^2 est pair, alors a est pair.

Exercice I.48. Prouvez, à l'aide de la contraposée, que quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si $3a + 2$ est impair, alors a est impair.

Exercice I.49. Prouvez la formule suivante à l'aide de la contraposée.

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (ab = n) \Rightarrow (a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n})$$

Exercice I.50. Prouvez, par l'absurde, que la formule suivante est vraie.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{Q} \wedge b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (a + b \notin \mathbb{Q}).$$

Exercice I.51. Prouvez, par l'absurde, que zéro n'a pas d'inverse pour la multiplication.

Exercice I.52. Prouvez, par l'absurde, que quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a^2 est pair, alors a est pair.

Exercice I.53. Prouvez, par l'absurde, que la formule suivante est vraie.

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a \neq 0 \wedge a \in \mathbb{Q} \wedge b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (ab \notin \mathbb{Q}).$$

Exercice I.54. Prouvez, par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice I.55. Prouvez que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice I.56. Prouvez par l'absurde la proposition suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est le carré d'un entier non-nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice I.57. Vous trouverez ci-dessous une proposition et sa preuve. Qu'en pensez-vous ?

Proposition : La formule $\forall n \in \mathbb{Z} n^2 > 0$ est vraie.

Preuve :

On va considérer deux cas.

Premier cas : si n est strictement positif. On sait que $n^2 = n \cdot n$. Vu que le produit de deux nombres strictement positifs est strictement positif, on peut conclure que $n^2 > 0$.

Deuxième cas : si n est strictement négatif. On a toujours que $n^2 = n \cdot n$. Vu que le produit de deux nombres strictement négatifs est strictement positif, on peut conclure que $n^2 > 0$.

La proposition est donc vraie.

Exercice I.58. Vous trouverez ci-dessous une proposition et sa preuve. Qu'en pensez-vous ?

Proposition : La formule $\forall n \in \mathbb{Z} n^2 > 0$ est vraie.

Preuve :

On va proposer une preuve par l'absurde.

Par l'absurde, on suppose la négation de l'affirmation que nous souhaitons prouver.

La négation de la formule $\forall n \in \mathbb{Z} n^2 > 0$ est la formule $\exists n \in \mathbb{Z} n^2 \leq 0$.

Il est clairement absurde de supposer l'existence d'un nombre entier donc le carré serait négatif.

On peut donc conclure que la proposition est vraie.

Exercice I.59. Nous allons décrire un jeu à deux joueurs qui se joue avec deux tas de pierres. Dans ce jeu, les joueurs jouent à tour de rôle. On pose sur une table deux tas de pierres, chaque tas est composé du même nombre n de pierres. Chaque joueur peut, quand c'est à lui de jouer, choisir de retirer une ou plusieurs pierres dans le tas de son choix. Au cours d'un même tour, il ne peut pas retirer des pierres provenant de deux tas différents. Par contre, il peut retirer autant

de pierres qu'il le souhaite dans le tas de son choix (tant qu'il en retire au moins une). Il peut également changer de tas lors du tour suivant. Le gagnant est le joueur qui retire la dernière pierre de la table.

- (1) Ce jeu peut-il se conclure par un *match nul* ?
- (2) Dans le cas où $n = 5$, la stratégie ci-dessous est-elle gagnante¹ pour le joueur qui commence à jouer :
 - *Au premier coup, retirer toutes les pierres de l'un des deux tas.*
 - *Ensuite, retirer une pierre à la fois dans l'autre tas.*
- (3) Dans le cas où $n = 5$, la stratégie ci-dessous est-elle gagnante pour le joueur qui commence à jouer :
 - *Toujours ne retirer qu'une pierre à la fois, avec une préférence pour le plus gros tas (quand les deux tas sont de tailles différentes, sinon au hasard).*
- (4) Dans le cas où $n = 5$, la stratégie ci-dessous est-elle gagnante pour le joueur qui **ne** commence **pas** à jouer :
 - *Si le joueur qui a commencé à jouer a retiré k pierres dans l'un des deux tas au coup précédent, on retire k pierres dans l'autre tas.*
- (5) Dans le cas où $n = 6$, est-il possible de donner une stratégie gagnante pour le joueur qui commence à jouer ?
- (6) Dans le cas où $n = 6$, est-il possible de donner une stratégie gagnante pour le joueur qui **ne** commence **pas** à jouer ?
- (7) Que se passe-t-il pour n quelconque ?
- (8) Que se passe-t-il si on change légèrement les règles du jeu en imposant que les deux tas ne contiennent pas le même nombre de pierres au début de la partie ?

3 Introduction aux probabilités

3.1 Au delà du monde binaire

Le monde réel n'est pas binaire. Si on lance un dé à six faces, et que l'on considère l'affirmation « *le dé va tomber sur un nombre pair* » plutôt qu'une réponse binaire de type *oui ou non*, on s'attend plutôt à une réponse du type « *il y a une chance sur deux que le dé tombe sur un nombre pair* » (dans le cas d'un dé parfaitement équilibré).

Définition 60 (Univers d'une expérience aléatoire). Quand on réalise une expérience aléatoire on appelle l'*univers* de l'expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles, souvent noté Ω .

1. Une stratégie est dite gagnante pour un joueur si le joueur qui suit cette stratégie gagne la partie, quelle que soit la manière de jouer de son adversaire.

Définition 61 (Ensembles, éléments et appartenance). Un *ensemble* est une collection d'objets. Les objets de l'ensemble sont appelés les *éléments* de l'ensemble. Si A est un ensemble et a est un élément de A , on dit aussi que a *appartient* à A (on dit aussi que A contient a). On note alors $a \in A$. Dans le cas où a n'appartient pas à A , on note $a \notin A$.

Définition 62 (Ensemble défini en extension). Un ensemble est défini **en extension** si on donne explicitement la liste de ses éléments. Par exemple : $\{1, 2, 3\}$.

Définition 63 (Ensemble défini en compréhension). Un ensemble est défini **en compréhension** si on donne une formule qui définit ses éléments. Si $P(x)$ est un prédicat de domaine A , l'ensemble $\{x \in A \mid P(x)\}$ est défini en extension. Par exemple : $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\}$.

Définition 64 (Événement). On considère une expérience aléatoire d'univers Ω . Un *événement* de cette expérience aléatoire est un sous-ensemble de Ω .

Définition 65 (Inclusion d'ensembles). On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B , noté $A \subseteq B$, si et seulement si

$$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Définition 66 (Égalité d'ensembles). On dit que deux ensemble A et B sont *égaux*, noté $A = B$, si et seulement si

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Définition 67 (Cardinalité d'un ensemble fini). Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. Si A contient exactement n éléments distincts, on dit que A est un ensemble fini et que la *cardinalité* de A est n . La cardinalité de l'ensemble A est notée $|A|$.

Définition 68 (Probabilité). On considère une *expérience aléatoire* dont l'univers Ω est constitué d'un nombre **fini** d'issues **équiprobables** (par exemple le lancer d'un dé parfaitement équilibré). Dans ce cas, la **probabilité d'un événement** $E \subseteq \Omega$, notée $\mathbb{P}(E)$ est définie par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Définition 69 (Ensemble vide). L'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est noté \emptyset ou $\{\}$.

On remarque que quel que soit l'univers Ω (non vide) on a que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

3.2 La probabilité d'événements combinés

Définition 70 (Union d'ensembles). L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ et défini ci-dessous.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

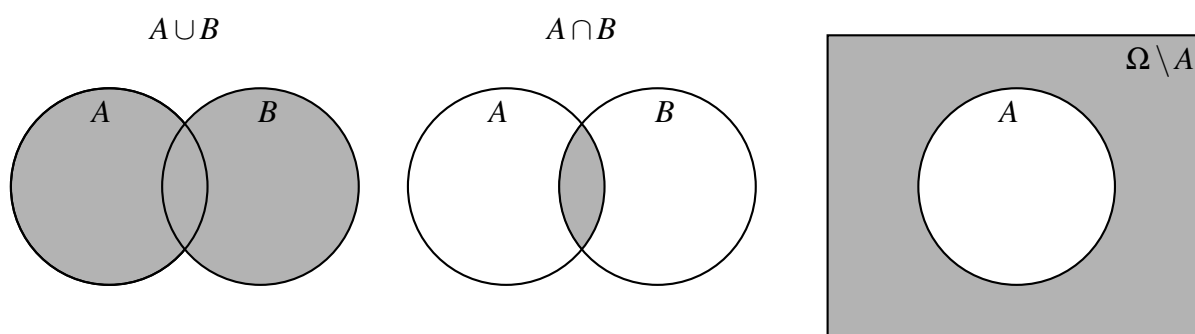
Définition 71 (Intersection d'ensembles). L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ et défini ci-dessous.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Définition 72 (Complémentaire d'un ensemble). On se fixe Ω un univers. Soit A un ensemble, le **complémentaire de A (dans Ω)** est noté \bar{A} , A^c , ou $\complement A$ ou encore $\Omega \setminus A$ et est défini ci-dessous.

$$\bar{A} = A^c = \complement A = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

Définition 73. Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.



3.3 Combinaisons et triangle de Pascal

Exercice I.74 (Marche de l'ivrogne). Après avoir bien bu, un étudiant sort d'un bar. Il habite dans la même rue que le bar, mais il ne sait plus où... A chaque pas, il va vers la droite avec une chance sur deux, et vers la gauche avec une chance sur deux. On peut représenter sa rue par l'ensemble des entiers \mathbb{Z} . Si on suppose que la position du bar est en 0, où (et avec quelle probabilité) peut se trouver notre étudiant après 1 pas ? 2 pas ? 3 pas ? 4 pas ? n pas ?

Définition 75 (Factorielle). Soit $n \in \mathbb{N}$, la **factorielle** de n , notée $n!$, est définie par

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Par convention, on pose que $0! = 1$.

Exercice I.76. Calculez $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$.

Définition 77 (Coefficient binomial). Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, le **coefficient binomial**, noté $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n », est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

parfois aussi noté C_n^k .

Proposition 78 (Propriété des coefficients binomiaux). *Quel que soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 < k \leq n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Définition 79 (Triangle de Pascal). Le **triangle de Pascal** est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle. Une représentation des cinq premières lignes du triangle de Pascal est donnée sur la Figure 1.

Ligne 0	$\binom{0}{0}$
Ligne 1	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
Ligne 2	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
Ligne 3	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$
Ligne 4	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

FIGURE 1 – Cinq premières lignes du triangle de Pascal.

3.4 Exercices

Exercice I.80. Donnez en extension les ensembles suivants.

- | | |
|--|---|
| (1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$. | (4) $A_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10 \wedge n \leq 12\}$. |
| (2) $A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$. | (5) $A_5 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair} \wedge x < 8\}$. |
| (3) $A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 1 = 0\}$. | (6) $A_6 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3 \Rightarrow x \leq 2\}$. |

Exercice I.81. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| (1) $1 \in \mathbb{N}$ | (8) $\{2\} \subseteq \{2, \{2\}\}$. | (15) $\{\mathbb{N}\} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ |
| (2) $\{1\} \in \mathbb{N}$ | (9) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ | (16) $\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ |
| (3) $1 \subseteq \mathbb{N}$ | (10) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ | (17) $[0, 2] = \{0, 1, 2\}$ |
| (4) $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ | (11) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ | (18) $[0, 1] \subseteq [0, 2]$ |
| (5) $2 \in \{2, \{2\}\}$. | (12) $\mathbb{N} \subseteq \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ | (19) $[0, 1] \subseteq [1, 2]$ |
| (6) $\{2\} \in \{2, \{2\}\}$. | (13) $\{\mathbb{N}\} \in \mathbb{Z}$ | (20) $\{[0, 1]\} \subseteq \{[1, 2]\}$ |
| (7) $2 \subseteq \{2, \{2\}\}$. | (14) $\{\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ | |

Exercice I.82. Donnez l'univers des expériences aléatoires suivantes.

- (1) On lance une fois une pièce de monnaie.
- (2) On lance deux fois une pièce de monnaie.
- (3) On lance une fois deux pièces de monnaie.
- (4) On lance une fois un dé à six faces.
- (5) On lance deux fois un dé à six faces.
- (6) On lance un dé à six faces et une pièce de monnaie.
- (7) On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir "pile".

Exercice I.83. On considère une expérience aléatoire dans laquelle on lance une fois un dé à six faces. Donnez les événements suivants :

- (1) Le dé tombe sur 4.
- (2) Le dé tombe sur un nombre impair.
- (3) Le dé tombe sur un nombre strictement supérieur à 1.

Exercice I.84. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. A est-il inclus à B ? B est-il inclus à A ?

Exercice I.85. Soient $A = \{1, 2, 1, 2, 1\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. A est-il inclus à B ?

Exercice I.86. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

$$(a) \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \quad (b) \{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{R}\}.$$

Exercice I.87. Donnez la cardinalité des ensembles suivants.

- | | |
|--|--|
| (1) $A_1 = \{0, 1, 2\}$. | (4) $A_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10 \wedge n \leq 12\}$. |
| (2) $A_2 = \{0, 1, 2, 0\}$. | (5) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$. |
| (3) $A_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\}$. | (6) $A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$. |

Exercice I.88. Déterminer si les paires d'ensembles suivants sont égaux. Justifier.

- (1) $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3, 1\}$.
- (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ et $\{1\}$.
- (3) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$ et $2\mathbb{N}$.

Exercice I.89. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois un dé à six faces (parfaitement équilibré).

- (1) Donnez l'univers de cette expérience aléatoire.
- (2) Calculez la probabilité de l'événement : *trois*.
- (3) Calculez la probabilité de l'événement : *un nombre pair*.
- (4) Calculez la probabilité de l'événement : *un nombre inférieur ou égal à 7*.

Exercice I.90. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois deux dés à six faces (parfaitement équilibrés).

- (1) Donnez l'univers de cette expérience aléatoire.
- (2) Calculez la probabilité de l'événement : *la somme des dés est inférieure ou égale à 2*.
- (3) Calculez la probabilité de l'événement : *la somme des dés est inférieure ou égale à 3*.
- (4) Calculez la probabilité de l'événement : *les deux dés affichent le même nombre*.
- (5) Calculez la probabilité de l'événement : *les deux dés affichent des nombres différents*.

Exercice I.91. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois quatre pièces de monnaie (parfaitement équilibrées).

- (1) Donnez l'univers de cette expérience aléatoire.
- (2) Calculez la probabilité de l'événement : *quatre piles*.
- (3) Calculez la probabilité de l'événement : *zéro pile*.
- (4) Calculez la probabilité de l'événement : *autant de piles que de faces*.

Exercice I.92. L'ensemble $\{\emptyset\}$ est-il égal à l'ensemble vide ?

Exercice I.93. Prouvez que l'ensemble vide est unique.

Exercice I.94. Prouvez que quel que soit un ensemble A , on a (a) $\emptyset \subseteq A$; et (b) $A \subseteq A$.

Exercice I.95. Pour chaque paire d'ensembles A et B donnée ci-dessous, calculez $A \cap B$ et $A \cup B$.

- | | |
|--|---|
| (1) $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$. | (5) $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{Z}$. |
| (2) $A = \{p, q, r\}$ et $B = \{p, q, r\}$. | (6) $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \mathbb{N}$. |
| (3) $A = \{X, Y, Z\}$ et $B = \{W, X, Y, Z, T\}$. | (7) $A = \mathbb{N}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. |
| (4) $A = \{\text{un, deux, trois}\}$ et $B = \{3, 4\}$. | |

Exercice I.96. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois un dé à six faces (parfaitement équilibré).

- (1) Donnez l'univers de cette expérience aléatoire.
- (2) On note E_1 l'événement : *un nombre pair*. Donnez en extension l'événement E_1 .
- (3) On note E_2 l'événement : *un multiple de trois*. Donnez en extension l'événement E_2 .
- (4) On note E_3 l'événement : *un nombre strictement supérieur à trois*. Donnez en extension l'événement E_3 .
- (5) Calculez $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$, $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$, $\mathbb{P}(E_2 \cup E_3)$, $\mathbb{P}(E_2 \cap E_3)$, $\mathbb{P}(E_1 \cup E_3)$, et $\mathbb{P}(E_1 \cap E_3)$.

Exercice I.97. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois trois pièces de monnaie (parfaitement équilibrées).

- (1) Donnez l'univers de cette expérience aléatoire.
- (2) Calculez la probabilité de l'événement : *pile sur la première pièce et face sur la troisième pièce*.
- (3) Calculez la probabilité de l'événement : *pile sur la première pièce ou face sur la troisième pièce*.

Exercice I.98. On considère une expérience aléatoire lors de laquelle on lance une fois deux dés à six faces (parfaitement équilibrés).

- (1) Calculez la probabilité de l'événement : *le nombre sur le premier dé est trois et le nombre sur le second dé est impair*.
- (2) Calculez la probabilité de l'événement : *le nombre sur le premier dé est trois ou le nombre sur le second dé est impair*.
- (3) Calculez la probabilité de l'événement : *le nombre sur le premier dé est pair et la somme de dés est inférieure ou égale à quatre*.
- (4) Calculez la probabilité de l'événement : *le nombre sur le premier dé est pair ou la somme de dés est inférieure ou égale à quatre*.

Exercice I.99. Soit Ω un univers constitué d'un nombre fini d'issues équiprobables. Soient A et B deux événements. Déterminez si les affirmations suivants sont vraies ou fausses.

- (1) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- (2) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.
- (3) $(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B))$.
- (4) $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$.

Exercice I.100. Calculez les cinq premières lignes du triangle de Pascal en remplaçant les coefficients binomiaux de la Figure 1 par leur valeur.

Exercice I.101. Quel lien pouvez-vous faire entre l'Exercice I.74 et le triangle de Pascal ?

Exercice I.102. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouvez la formule du **binôme de Newton** :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k.$$

Exercice I.103. Prouvez que dans le triangle de Pascal, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la somme des termes de la ligne n est égale à 2^n .

Exercice I.104. Soient $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en x . Prouvez la formule de **Leibniz** :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

où $h^{(\ell)}$ désigne la dérivée ℓ -ième de la fonction h .

II. Fonctions et inéquations

4 Notions de base

4.1 Ordre sur \mathbb{R} et intervalles

L'ordre \leq sur \mathbb{R} possède les propriétés élémentaires suivantes :

- réflexivité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;
- antisymétrie : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$;
- transitivité : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.
- totalité : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- compatibilité avec l'addition : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$.
- compatibilité avec la multiplication : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$.

Un *intervalle* de \mathbb{R} est un ensemble d'une des formes suivantes :

- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\}$ pour certains $a < b$ réels ;
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leq b\}$ pour certains $a < b$ réels ;
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x < b\}$ pour certains $a < b$ réels ;
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ pour certains $a \leq b$ réels ;
- $] -\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ pour un $b \in \mathbb{R}$;
- $] -\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ pour un $b \in \mathbb{R}$;
- $] a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ pour un $a \in \mathbb{R}$;
- $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ pour un $a \in \mathbb{R}$;
- $] -\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$.

Notez qu'avec cette définition un singleton est un intervalle ($\{a\} = [a, a]$) mais pas l'ensemble vide. Les quatre premiers cas sont appelés des intervalles *bornés* tandis que les cinq derniers cas sont dit *non bornés*.

Souvent il est pratique (c'est ce que nous ferons) de considérer des *intervalles non-orientés*, c'est-à-dire qu'on ne se soucie pas de l'ordre des bornes, on prend toujours tous les réels entre ces bornes. Par exemple, la définition pour $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est

$$]a, b] := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leq b\} & \text{si } a \leq b, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid b \leq x \wedge x < a\} & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Il est aisé de généraliser les définitions des autres types d'intervalle de la même manière (ceci est à votre charge). Avec ces définitions d'intervalle, on a par exemple $]a, b] = [b, a[$, ce qui illustre que l'ordre des bornes n'est pas important. On peut donner des définitions de ces intervalles non-orientés qui ne nécessitent pas de distinction de cas. Par exemple, pour l'intervalle $]a, b]$ ci-dessus, on a (pouvez-vous le montrez ?), quels que soient $a \neq b$ réels,

$$]a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in]0, 1]\}.$$

Les résultats analogues pour les autres types d'intervalle vous sont laissés comme exercices.

4.2 Fonctions monotones

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que

- f est *croissante sur A* ($f \nearrow$ sur A) si

$$\forall x_1, x_2 \in A \cap \text{Dom } f, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f est *strictement croissante sur A* ($f \nearrow$ sur A) si

$$\forall x_1, x_2 \in A \cap \text{Dom } f, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f est *décroissante sur A* ($f \searrow$ sur A) si

$$\forall x_1, x_2 \in A \cap \text{Dom } f, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f est *strictement décroissante sur A* ($f \searrow$ sur A) si

$$\forall x_1, x_2 \in A \cap \text{Dom } f, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

On dit qu'une fonction est (strictement) (dé)croissante lorsqu'elle est (strictement) (dé)croissante sur tout son domaine (i.e., $A = \mathbb{R}$).

Si une fonction f est *strictement* croissante sur A , elle est en particulier croissante sur A . De plus elle vérifie aussi

$$\forall x_1, x_2 \in A \cap \text{Dom } f, \quad f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2 \tag{1}$$

(vous devez pouvoir le montrer).

Les seules fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sont les fonctions constantes. (Pouvez-vous le prouver ?)

Une fonction f est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*) si f est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. strictement décroissante).

4.3 Fonctions affines

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ est dite *affine* si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax + b$$

pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. Le *graphe* d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que y est l'image de x par f . On le note $\text{Graph } f$. Plus concisément,

$$\text{Graph } f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \text{ existe}\}.$$

Il est important de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il y a *au plus un* $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \text{Graph}(f)$. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Plus précisément, le graphe de la fonction $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ et d'équation paramétrique

$$(x, y) = (0, b) + \lambda(1, a), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La relation entre les équations cartésiennes et paramétriques est expliquée à la section 7, page 41.

Le a d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ s'appelle le *coefficient angulaire*, la *pente* ou encore la *dérivée* de f . Si $a > 0$, la fonction est croissante (voir la définition ci-dessus); si $a < 0$, elle est décroissante; si $a = 0$, elle est constante. Si (x_1, y_1) est un vecteur directeur d'une droite avec $x_1 \neq 0$, cette droite est ² le graphe d'une fonction affine dont le coefficient angulaire est y_1/x_1 .

La *fonction identité* sur les réels $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est un cas particulier de fonction affine.

4.4 Valeur absolue

La valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x est définie par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Notez que $\sqrt{x^2}$ vaut $|x|$ et non x (essayez avec des valeurs numériques!). Pour la résolution d'inéquations comportant des valeurs absolues, on peut revenir à la définition et distinguer les différents cas possibles ou, plus efficacement, utiliser les équivalences

$$|x| < r \iff (-r < x \text{ et } x < r)$$

$$|x| > r \iff (x < -r \text{ ou } r < x)$$

qui sont valides pour tout ³ $r \in \mathbb{R}$. Nous vous laissons le soin de déduire les équivalences analogues pour \leq (resp. \geq) au lieu de $<$ (resp. $>$). Il est attendu que vous puissiez tracer le graphe de $|f|$ à partir du graphe de f . Vous devez être également capables de résoudre graphiquement des inéquations.

2. Démontrez le !

3. Évidemment, si $r \leq 0$, on a des équivalences plus simples... Voyez-vous pourquoi ?

4.5 Polynôme du second degré

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un *polynôme du second degré* si f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Le graphe d'une telle fonction est une parabole de sommet $-b/(2a)$. Si $a > 0$, la parabole est « tournée vers le haut »; si $a < 0$, elle est « tournée vers le bas ».

Pour le signe d'une expression du second degré, trois cas peuvent se produire.

- Si $\Delta := b^2 - 4ac < 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a .
- Si $\Delta = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en $x = -b/(2a)$ et possède le même signe que celui de a ailleurs.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède deux racines $x_1 < x_2$ (pour lesquelles vous avez vu en secondaire des formules explicites), possède le même signe que a à l'extérieur de ces racines et le signe opposé à a entre celles-ci. On peut résumer ceci par le tableau suivant.

x	x_1	x_2
$ax^2 + bx + c$	sign(a) 0	-sign(a) 0 sign(a)

4.6 Fonctions de base

Les domaines, images, graphes et propriétés des fonctions suivantes sont supposés connus.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^\alpha$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ seront maîtrisées.
- Les fonctions trigonométriques cos, sin, tg (les angles seront *toujours* en radians — sans qu'on ait besoin de le préciser).
- Les fonctions trigonométriques inverses arcsin, arccos et arctg.
- Les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x = \exp(x)$ et $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln x = \log x$.

Nous vous invitons à faire l'exercice [II.7](#) afin de rafraîchir vos connaissances.

Nous vous rappelons les règles de calcul sur les exposants (vous pouvez les retrouver à partir des exposants entiers). Ces règles sont valables pour $x > 0$ et, plus généralement, dès que les deux membres sont bien définis.

- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$,
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

4.7 Inéquations

Une inéquation est une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) < g(x)$, où f et g sont des fonctions et x est une *inconnue*. On cherche pour quelles valeurs de x l'inégalité est satisfaite. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est donc $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom } f \wedge x \in \text{Dom } g \wedge f(x) \leq g(x)\}$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$, c'est exprimer l'ensemble de ses solutions

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom } f \wedge x \in \text{Dom } g \wedge f(x) \leq g(x)\}$$

comme union minimale⁴ d'intervalles. Comme conséquence de cette minimalité, ces intervalles doivent être *disjoints* deux à deux (c'est-à-dire que l'intersection de n'importe quelle paire de ces intervalles est vide). Il est facile d'adapter les définitions précédentes aux inéquations de la forme $f(x) < g(x)$.

5 Exercices

Exercice II.1. À partir des propriétés de l'ordre sur \mathbb{R} (page 22), établissez les affirmations suivantes.

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x \geq 0 \text{ et } x \leq 0) \Rightarrow x = 0$.
- (2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$.
- (3) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$.
- (4) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \Rightarrow x + y \geq 0$.
- (5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.
- (6) $1 \geq 0 \geq -1$.
- (7) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors $xy \leq 0$.
- (8) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $xy \geq 0$.
- (9) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Leftrightarrow -x \geq -y$.
- (10) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > 0 \Leftrightarrow 1/x > 0$.
- (11) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x < 0 \Leftrightarrow 1/x < 0$.
- (12) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $z > 0$ alors $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$.
- (13) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $z < 0$ alors $x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$.

Exercice II.2. Tracez le graphe des fonctions suivantes :

4. La *minimalité* des intervalles signifie que leur nombre est le plus petit possible. Par exemple, on n'écrira pas $[0, 1] \cup [1, 2]$ mais $[0, 2]$ qui est une écriture du même ensemble avec moins d'intervalles.

$$\blacksquare f_1(x) = 2x - 3, \quad \blacksquare f_2(x) = 2x, \quad \blacksquare f_3(x) = 2x + 3.$$

Résolvez algébriquement et graphiquement $f_i(x) \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Exercice II.3. Tracer sur un même graphique le graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) &= |x| \\ \blacksquare g(x) &= |x - 2| \\ \blacksquare h(x) &= |x + 2| \end{aligned}$$

Exercice II.4. Résolvez algébriquement et graphiquement les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad |x| &< |x - 1| & (4) \quad |x^2 - x| &< 2x \\ (2) \quad |x| + |x - 1| &\leq 3 & (5) \quad x|x| &> x \\ (3) \quad 1 + |\pi - x| &< 1 - |\pi + x| & (6) \quad |x^2 - 2x - 3| &\leq x^2 - 1. \end{aligned}$$

Exercice II.5. Montrez que $|a + b| \leq |a| + |b|$. Déduisez en qu'on a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Exercice II.6. Donnez les ensembles de solutions sur \mathbb{R} des inéquations suivantes (indiquer au préalable les conditions d'existence).

$$\begin{aligned} (1) \quad |3x + 5| &\leq 2 & (11) \quad \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} &\leq x \\ (2) \quad |x^2 + 3x - 3| &\geq 1 & (12) \quad \frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} &> 1 \\ (3) \quad \left| \frac{x + 1}{x^2 + 2} \right| &\leq 3 & (13) \quad -3\sqrt{-x^2 - x + 6} &< 2(2x + 1) < 3 \\ (4) \quad |x^2 - 3| &< 3x + 2 & (14) \quad (2x + \sqrt{x})^4 + 4(2x + \sqrt{x})^2 &\leq 5 \\ (5) \quad \left| \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} \right| &\leq 2 & (15) \quad 2x + 1 + \sqrt{6 - x - x^2} &> 0 \\ (6) \quad 3x + 2 &\leq 2|x^2 + x - 1| & (16) \quad 1 - \sqrt{\frac{x + 1}{2x + 1}} &> \sqrt{\frac{4 - x}{2x + 1}} \\ (7) \quad \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} &\leq 5 & (17) \quad \ln(x - \sqrt{1 - x^2}) &< 0 \\ (8) \quad \frac{1}{x} &\leq \frac{1}{\sqrt{2 - x}} & (18) \quad \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} &\leq \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 4} \\ (9) \quad \frac{\sqrt{x^3(x - 1)}}{x} &\leq \frac{3}{8} & (19) \quad \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{2 - x} &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \\ (10) \quad \frac{1}{x(x - 1)} &\leq \frac{1}{\sqrt{x(x + 9)}} & (20) \quad \left(\frac{3 - 2x}{x - 1} \right)^2 &\leq \left(\frac{6 - 5x}{x + 2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$(21) \log_2(x+1) + \log_4 x < 1$$

$$(22) |\sin x + 1| \leq 1$$

$$(23) \left| 2 \cos x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$(24) 2 \leq |x^2 + 4x - 1| < 4$$

$$(25) |\sin x| \leq \cos x$$

Exercice II.7. Parmi les graphes ci-dessous, reconnaissez ceux des fonctions élémentaires suivantes :

$$(1) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

$$(2) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x$$

$$(3) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

$$(4) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$$

$$(5) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

$$(6) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{2/3}$$

$$(7) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/3}$$

$$(8) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$

$$(9) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$$

$$(10) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$

$$(11) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$$

$$(12) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$$

$$(13) [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin(x)$$

$$(14) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$$

$$(15) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x + \pi/2)$$

$$(16) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x + \pi)$$

$$(17) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$$

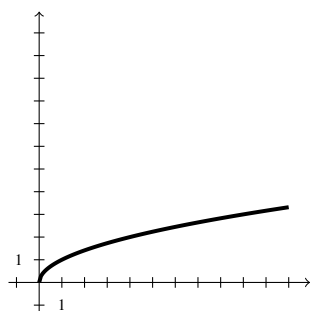
$$(18) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$$

$$(19) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$$

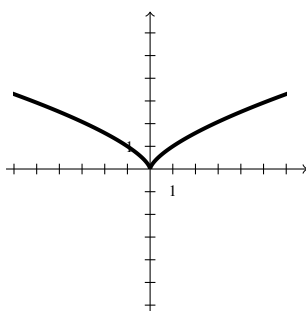
$$(20) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$$

$$(21) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

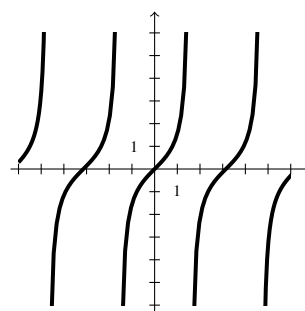
$$(22) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



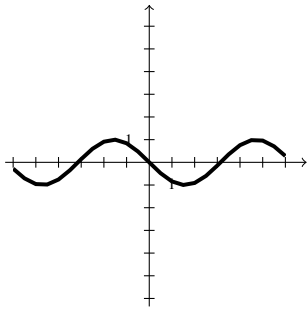
Graphe 1



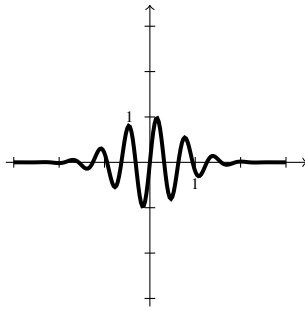
Graphe 2



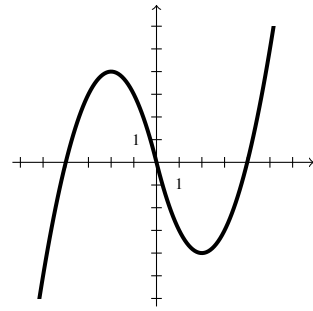
Graphe 3



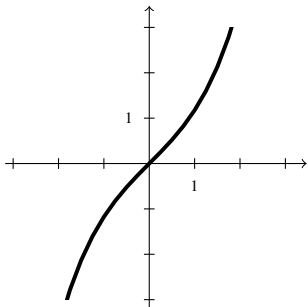
Graphe 4



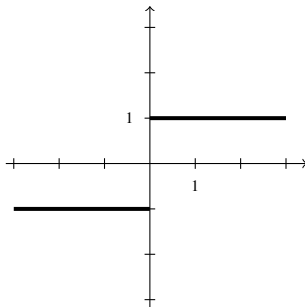
Graphe 5



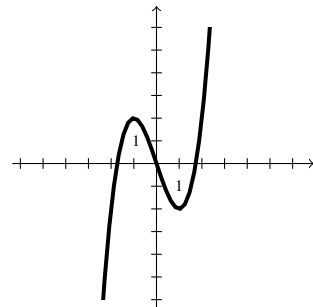
Graphe 6



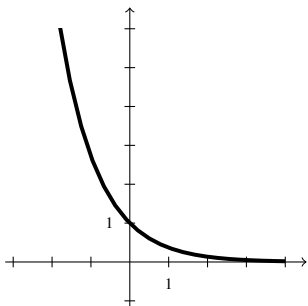
Graphe 7



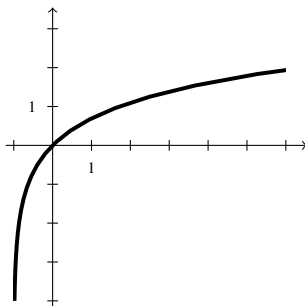
Graphe 8



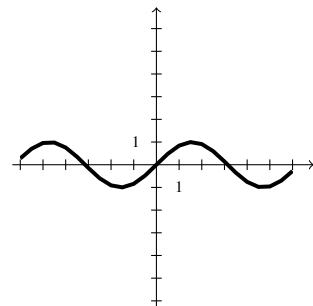
Graphe 9



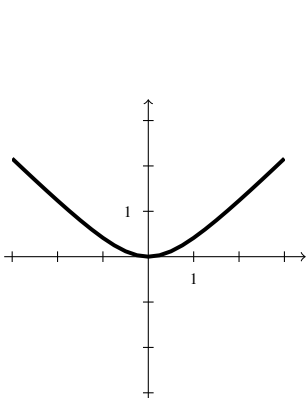
Graphe 10



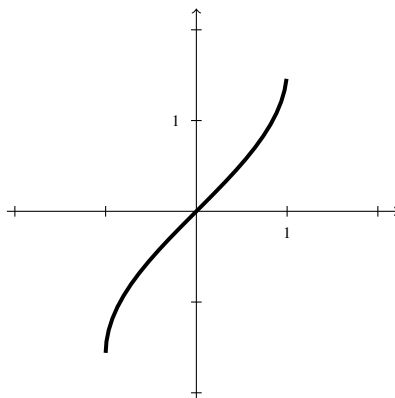
Graphe 11



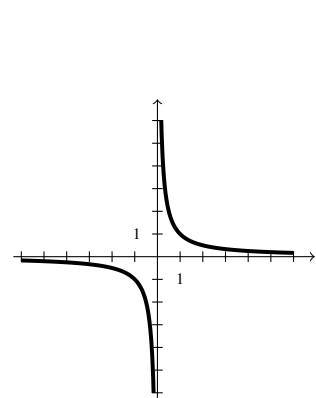
Graphe 12



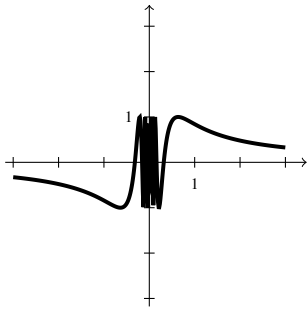
Graphe 13



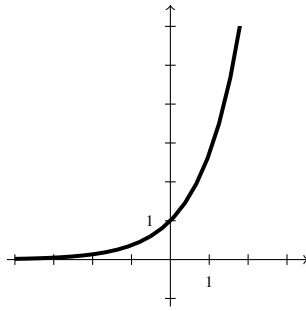
Graphe 14



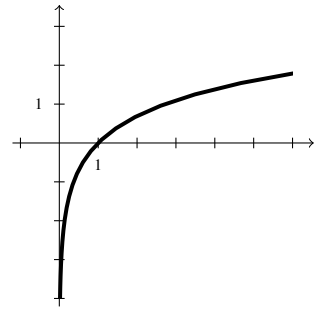
Graphe 15



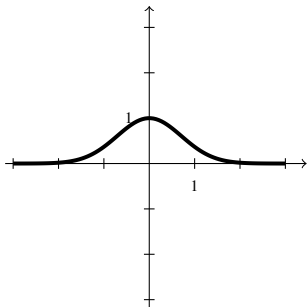
Graphe 16



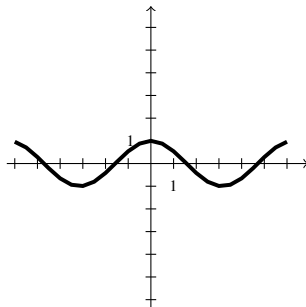
Graphe 17



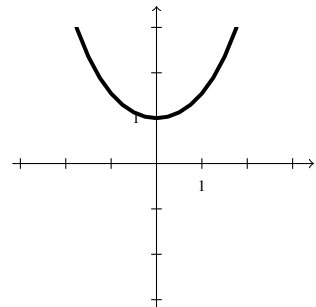
Graphe 18



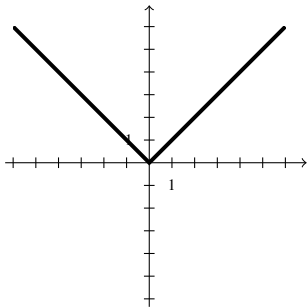
Graphe 19



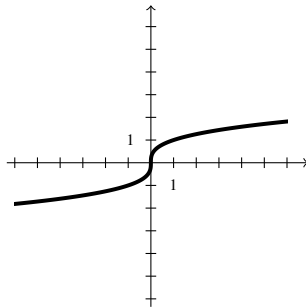
Graphe 20



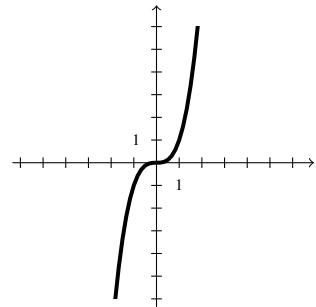
Graphe 21



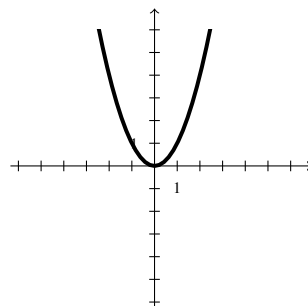
Graphe 22



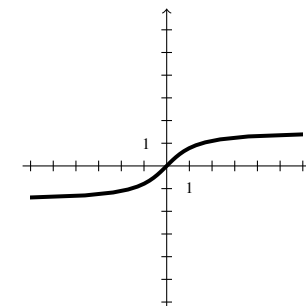
Graphe 23



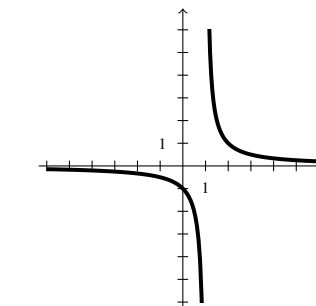
Graphe 24



Graphe 25



Graphe 26



Graphe 27

Exercice II.8. Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} 3x - 5 > 2x - 1 \\ 5x - 8 \leq 3x + 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (x+1)(x^2 + 2x - 1) > 0 \\ -(x+1)(x^2 + x - 2) < 0 \end{cases}$$

Exercice II.9. Toutes les droites sont-elles le graphe de fonctions affines ?

Exercice II.10. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le trinôme $x^2 + mx + m$ est-il strictement positif dans l'intervalle $[0, 1]$?

Exercice II.11. Donner, pour chaque valeur réelle m , le nombre de racines strictement supérieures à 1 du trinôme $x^2 + 2mx + 7m - 10$.

Exercice II.12. Déterminer tous les nombres réels α pour lesquels on a que $\alpha x^2 - x + \alpha \geq 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice II.13. Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations :

$$(1) \frac{x+1}{m} - \frac{2x-1}{2} \leq 1$$

$$(3) \frac{2x-1}{m+1} - \frac{2x-5}{2(m+1)} > \frac{x+2}{3}$$

$$(2) \frac{mx}{m-2} < \frac{2x+3}{4} + \frac{x-1}{3}$$

$$(4) \frac{m}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$$

Exercice II.14. Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ a-t-on $\left| \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$?

Exercice II.15. Soit $p \in]1, +\infty[$. Résoudre dans \mathbb{R} , en discutant selon les valeurs de p , l'inéquation $p^{x^2-1} > 5^{x-1}$.

Exercice II.16. Représenter dans \mathbb{R}^2 l'ensemble des couples (x, y) vérifiant chacun des systèmes d'inéquations suivants.

$$(1) \begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ -x + 6y - 3 < 0 \\ 2x - y - 8 < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x + y - 4 < 0 \\ x - 6y + 3 < 0 \end{cases}$$

$$(3) |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1$$

$$(4) |x+y| \leq 1$$

$$(6) ||x| - |y|| \leq 1$$

$$(5) 0 \leq |x| - |y| \leq 1$$

Exercice II.17. Prouver que les relations suivantes sont vraies pour n'importe quelles valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$(2) \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$(3) (x + y)^+ := \max\{x + y, 0\} \leq x^+ + y^+$$

$$(4) (x + y)^- := \max\{-x - y, 0\} \leq x^- + y^-$$

Exercice II.18 (Test du 4 octobre 1999). Résoudre algébriquement et graphiquement

$$\sqrt{25 - x^2} < x.$$

Exercice II.19 (Examen du 3 novembre 1999). Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation suivante :

$$\sqrt{12x + 9} < x^2 - 2x - 3$$

(Indiquer au préalable les conditions d'existence.)

III. Éléments d'algèbre linéaire

6 Optimisation linéaire

Introduction

Les problèmes étudiés dans ce chapitre consistent à trouver la valeur optimale (maximum ou minimum) d'une fonction dont les variables sont soumises à certaines restrictions. Par exemple :

- comment un agriculteur répartira-t-il ses cultures de manière à réaliser un bénéfice maximum tout en tenant compte du prix de revient de chaque culture, du nombre de jours de travail dont il dispose,...
- si deux substances contiennent chacune trois ingrédients A , B , C dont le coût est donné, comment composer ces deux produits pour obtenir le mélange le moins coûteux contenant 14 % de A , 20 % de B et 10 % de C ?
- comment trouver la valeur maximum de la fonction $f(x,y) = 2x + 3y$ si on la soumet aux contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

Pour les deux premiers exemples, il s'agit de choisir, parmi toutes les solutions possibles, celle qui maximisera la fonction « bénéfice » dans le premier cas ou celle qui minimisera la fonction « prix de revient » dans le second. Le dernier exemple est purement mathématique. On cherche parmi tous les couples (x,y) qui satisfont le système des contraintes, celui qui fournira la plus grande valeur prise par la fonction f .

Dans ces notes, la fonction f à optimiser sera une fonction affine de deux variables, c'est-à-dire de la forme

$$f(x,y) = ax + by + c$$

et ces deux variables seront soumises à des *contraintes* définies par des inéquations linéaires $a'x + b'y + c' \leq 0$ ou ≥ 0 .

6.1 Notions de base

Plaçons-nous dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ muni d'un repère orthonormé. Supposons, sans perte de généralité, que l'origine de tous les vecteurs considérés coïncide avec l'origine o du repère. À chaque point p de coordonnées (x, y) , on peut donc associer un vecteur $\vec{v} = \vec{op}$ et réciproquement. On dit que c'est une correspondance 1-1 et on écrira $\vec{v} = (x, y)$.

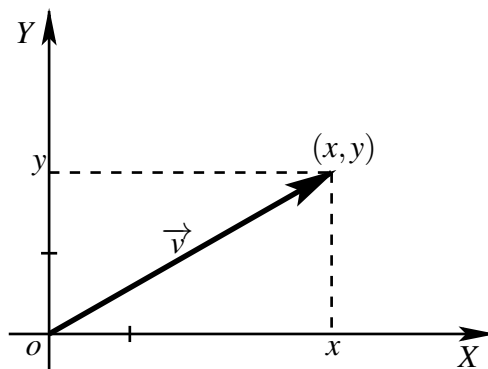


FIGURE 2 – Un vecteur de \mathbb{R}^2

La *norme* (ou longueur) d'un vecteur $\vec{v} = (x, y)$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ du plan est donné par

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := x_1x_2 + y_1y_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos \theta \quad (2)$$

où θ est un des deux angles formé par les deux vecteurs⁵ comme le montre la figure 3.

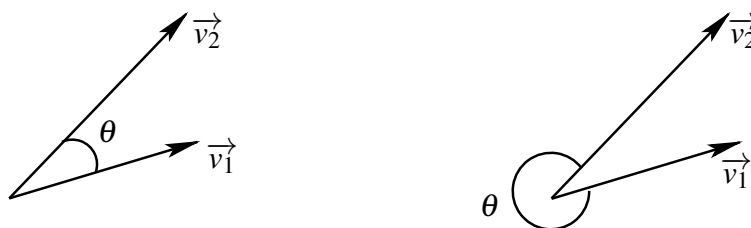


FIGURE 3 – Produit scalaire de deux vecteurs

Remarquons que le produit scalaire de deux vecteurs du plan est un nombre réel et pas un vecteur. Par exemple, $(1, -3) \cdot (-2, -1) = 1$.

De (2), nous déduisons que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si ils sont orthogonaux (Voyez-vous pourquoi?). Ainsi, tous les vecteurs (x, y) orthogonaux à $(2, 1)$

5. \vec{v}_1 et \vec{v}_2 définissent à priori deux angles. Vous pouvez choisir n'importe lequel des deux pour calculer le produit scalaire. En effet, ces deux angles ont le même cosinus. Justifiez pourquoi.

vérifient l'égalité $2x + y = 0$. Nous reconnaissons l'équation d'une droite, notée D_0 , qui passe par l'origine du repère. De même, l'ensemble des vecteurs (x, y) dont le produit scalaire avec $(2, 1)$ vaut 3 est la droite d'équation $2x + y = 3$. Remarquons que ces droites sont parallèles.

Plus généralement, les droites d'équation $2x + y = c$, $c \in \mathbb{R}_0$, forment un faisceau de droites parallèles à D_0 . De plus, la figure 4 montre que le vecteur $(2, 1)$ est perpendiculaire à chaque droite du faisceau.

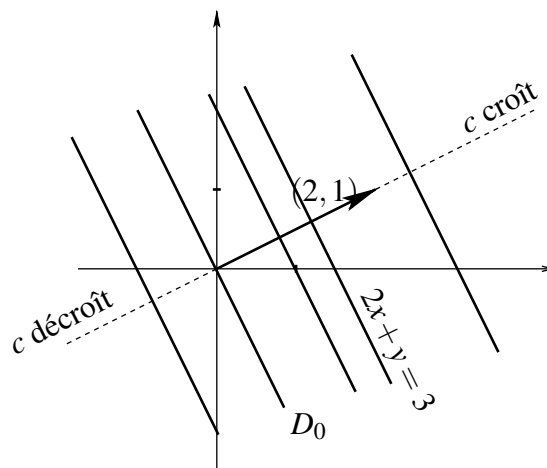


FIGURE 4 – Droites parallèles

CONCLUSIONS :

- L'équation générale d'une droite D du plan est $ax + by = c$. C'est l'ensemble des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 dont le produit scalaire avec (a, b) vaut c . Le vecteur (a, b) est perpendiculaire à cette droite ; il est appelé *vecteur normal* ou *gradient*⁶.
- Toute droite d'équation $ax + by = c'$ est parallèle à D .
- La figure 4 montre également que la valeur de c augmente (respectivement diminue) lorsque nous nous déplaçons dans le même sens (respectivement dans le sens opposé) que le *gradient*. Ce dernier argument sera capital dans la résolution des problèmes d'optimisation.

6. La notion de gradient sera abordée plus largement dans le cours d'analyse. Pour le moment, contentons-nous de remarquer que $(a, b) = (\partial_x(ax + by), \partial_y(ax + by))$.

6.2 Optimiser une fonction

➤ Optimiser la fonction $f(x,y) = 2x + y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ -x + y \leq 1 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Commençons par représenter graphiquement le système d'inéquations déterminé par les contraintes (voir figure 5). Nous obtenons ainsi le domaine Δ des solutions possibles du problème. Ce domaine est délimité par les sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,1)$ et $(3,0)$. C'est le *polygone des contraintes*. Considérons ensuite le faisceau de droites D_c d'équations $2x + y = c$ associé à la fonction f à optimiser. Son gradient est le vecteur $(2,1)$.

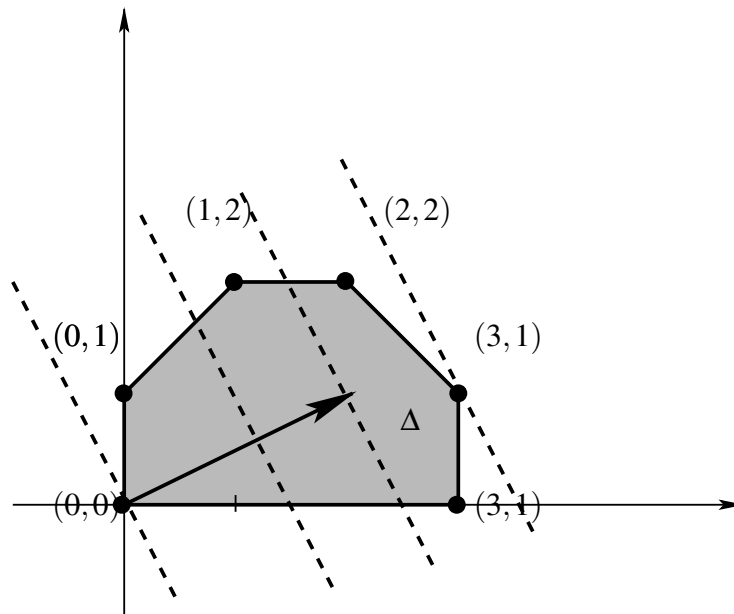


FIGURE 5 – Polygone des contraintes

Nous pouvons maintenant envisager la recherche du maximum et du minimum comme ceci : l'idée est de « balayer » le domaine Δ dans la même direction que le gradient de manière à faire varier c . Dès lors, trouver le maximum (respectivement le minimum) revient à trouver la plus grande (respectivement la plus petite) valeur de c telle que $D_c \cap \Delta$ ne soit pas vide.

La représentation du domaine Δ montre que nous pouvons supposer $c \in \mathbb{R}^+$. Le « balayage » s'effectuera donc uniquement dans le même sens que le gradient.

Nous déduisons facilement de ce graphique que le minimum de la fonction objectif $f(x,y) = 2x +$

y est atteint au sommet ⁷ $(0,0)$. C'est le premier point rencontré lors du balayage. Le maximum sera quant à lui atteint au dernier point du domaine qui intersecte une droite du faisceau, c'est-à-dire le sommet $(3,1)$ défini par l'intersection des droites d'équations $x = 3$ et $x + y = 4$.

En conclusion, le minimum de la fonction $f(x,y) = 2x + y$ sur Δ vaut $0 (= f(0,0))$ et son maximum vaut $7 (= f(3,1))$.

À priori, tous les points du domaine Δ sont des solutions possibles du problème. Toutefois, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit une fonction f définie par $f(x,y) = ax + by + c$ soumise à des contraintes de la forme $a_i x + b_i y \leq c_i$ (ou $\geq c_i$), avec $i = 1, \dots, n$. Si la valeur optimale (maximum ou minimum) de la fonction f existe, alors elle est atteinte en au-moins un sommet du domaine Δ délimité par les contraintes.*

C'est une propriété générale que nous ne démontrerons pas ici. Son intérêt est de restreindre la recherche du maximum ou du minimum à un nombre fini de points.

➤ Maximiser la fonction $f(x,y) = x + 2y + 1$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \geq -8 \\ x/2 + y \leq 6 \\ 3x + 2y \leq 24 \end{cases}$$

Le vecteur $(1,2)$ est le gradient de la fonction. Nous avons représenté le domaine Δ déterminé par les contraintes à la figure 6. En balayant le domaine Δ dans le même sens que le gradient, nous voyons que le maximum est atteint en tous les points du segment joignant les sommets $(2,5)$ et $(6,3)$. Cela montre qu'il n'y a pas systématiquement unicité de la solution. Cette constatation se justifie ici par le fait que la droite passant par ces deux sommets a pour équation $x/2 + y = 6$ (cf. le système des contraintes), ce qui peut encore s'écrire $x + 2y = 12$. Nous reconnaissons alors l'équation d'une droite du faisceau défini par la fonction. Le maximum de la fonction $f(x,y) = x + 2y + 1$ vaut donc 13.

➤ Soit la fonction $f(x,y) = -x - 2y$ soumise au système de contraintes (S) représenté par la figure 7. Cette fois, nous devons balayer le polygone des contraintes dans le sens opposé à celui du gradient $(-1, -1)$. Le minimum est donc atteint au dernier sommet rencontré lors du balayage, c'est-à-dire en $(3,3)$, tandis que le maximum est atteint en $(1,1)$. Le minimum de la fonction vaut alors -3 et le maximum vaut 1.

7. Puisque, d'après les contraintes, x et y sont deux nombres positifs, nous pouvions prévoir ce résultat sans passer par la résolution graphique.

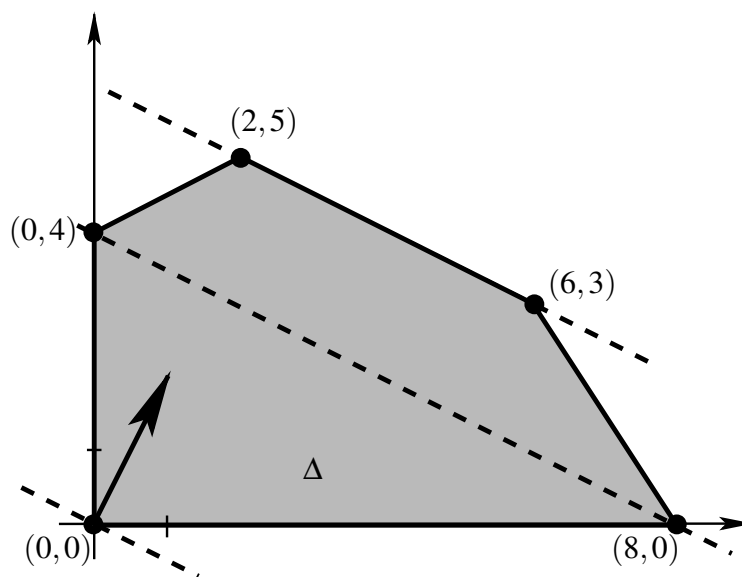


FIGURE 6 – Polygone des contraintes

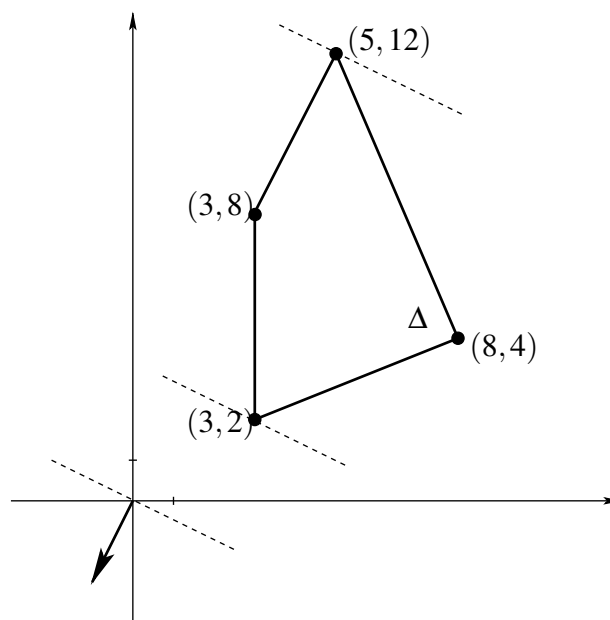


FIGURE 7 – Polygone des contraintes

➤ Un agriculteur possède 100 hectares de terre. Il désire planter des pommes de terre dans une partie, du froment dans une autre et laisser, peut-être, la troisième partie en jachère. Nous disposons des informations suivantes :

	pommes de terre	froment	total disponible
prix de la culture en milliers de francs par ha	10	20	1100
jours de travail par ha	1	4	160
bénéfice net en milliers de francs	40	120	

Comment l'agriculteur doit-il organiser ses cultures pour réaliser un bénéfice maximum ?

Désignons par x le nombre d'hectares plantés avec des pommes de terre, et par y le nombre d'hectares plantés avec du froment. Le nombre d'hectares laissés éventuellement en jachère est $100 - x - y$.

Le problème consiste à maximiser la fonction objectif $f(x, y) = 40x + 120y$.

Le choix des inconnues mène aux contraintes $x \geq 0, y \geq 0$ et $x + y \leq 100$. L'échéance impose que $x + 4y \leq 160$. D'autre part, l'agriculteur ne dépensera peut-être pas tout l'argent qui est à sa disposition, ce qui s'exprime par $10x + 20y \leq 1100$. Nous obtenons donc le système des contraintes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 110 \\ x + 4y \leq 160 \end{cases}$$

Les droites du faisceau défini par la fonction ont pour équation $40x + 120y = c$. Leur gradient est le vecteur $(40, 120)$. Le balayage nous permet de localiser le maximum recherché : c'est le sommet situé à l'intersection des droites d'équation $x + 4y = 160$ et $x + 2y = 110$. Ses coordonnées sont $(60, 25)$.

L'agriculteur réalisera un bénéfice maximum en plantant 60ha de pommes de terre, 25ha de froment et en laissant 15ha en jachère. La valeur de ses gains s'élèvera à 5400 milliers de francs.

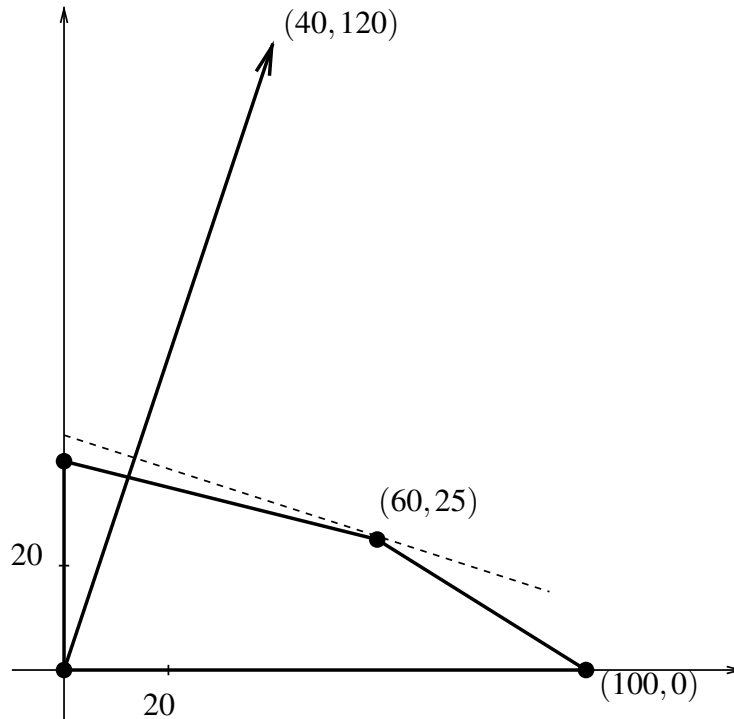


FIGURE 8 – polygone des contraintes

6.3 Exercices

- (1) Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction $f(x, y) = 2x + 5y + 1$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 6 \\ -x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

- (2) Dans une école, un groupe d'élèves se charge de vendre des croissants et des pains au chocolat à la récréation. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 96 croissants et de 108 pains au chocolat. Deux boulangeries proposent pour le même prix : un lot A comprenant 8 croissants et 12 pains au chocolat ; un lot B composé de 12 croissants et 9 pains au chocolat.

Quelle commande les élèves doivent-ils passer dans chaque boulangerie pour satisfaire la demande au moindre coût ?

- (3) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -3x - 2y$. On considère le système des

contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq \alpha x \end{cases} \quad (3)$$

où $\alpha \in]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (3). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

7 Droites et plans

Le produit scalaire dans le plan nous a permis de rappeler qu'une *équation cartésienne* d'une droite D du plan est $ax + by = c$ et que le vecteur $\vec{v}_n := (a, b)$ est *normal* à D .

Nous pouvons envisager la description d'une droite sous un autre angle. En effet, si D a pour direction le vecteur $\vec{v}_d = (x_d, y_d)$ et passe par le point (x_0, y_0) , alors n'importe quel point (x, y) de D s'écrira

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_d, y_d), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'équation ci-dessus est une *équation paramétrique* de D et le vecteur \vec{v}_d est un *vecteur directeur* de D . Bien entendu, on a la relation $\vec{v}_n \cdot \vec{v}_d = 0$.

Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by = c$ est, par exemple, $(-b, a)$. Pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne, il suffit d'éliminer le paramètre λ .

Plaçons-nous maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. De la même manière que dans

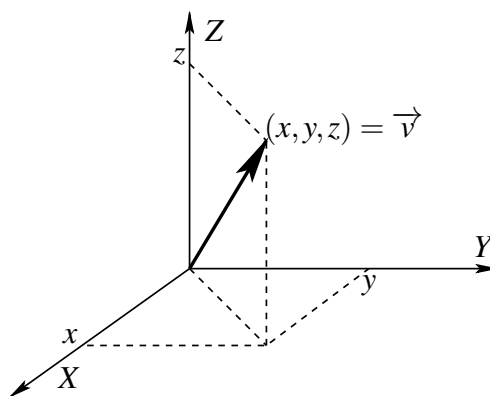


FIGURE 9 – Un vecteur de l'espace

\mathbb{R}^2 , on écrira $\vec{v} = (x, y, z)$ pour désigner un vecteur de l'espace et on aura $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (voir figure 9).

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sera donné par

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Si on regarde l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $(2, 1, -1)$, on obtient maintenant le plan α_0 d'équation $2x + y - z = 0$ qui passe par l'origine du repère. Le vecteur $(2, 1, -1)$ est orthogonal à α_0 . De même, l'ensemble des vecteurs dont le produit scalaire avec $(2, 1, -1)$ vaut 1 est le plan α_1 d'équation $2x + y - z = 1$. Ces deux plans sont parallèles. On peut transposer les conclusions obtenues dans le plan à l'espace.

CONCLUSIONS :

- L'équation générale d'un plan α de \mathbb{R}^3 est $ax + by + cz = d$. C'est l'ensemble des vecteurs de l'espace dont le produit scalaire avec (a, b, c) vaut d . Le vecteur (a, b, c) est normal à ce plan.
- Tout plan d'équation $ax + by + cz = d'$ est parallèle à α .

On peut aussi s'intéresser aux droites de \mathbb{R}^3 . Pour les décrire, il suffit, comme dans le plan, d'en connaître un point (x_0, y_0, z_0) et un vecteur directeur (x_d, y_d, z_d) . Alors, une *équation paramétrique* d'une droite D est

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_d, y_d, z_d), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En éliminant λ , on obtient un *système d'équations cartésiennes*

$$\frac{x - x_0}{x_d} = \frac{y - y_0}{y_d} = \frac{z - z_0}{z_d}.$$

7.1 Exercices

- Calculez la norme des vecteurs $\vec{a} = (-3, 0)$, $\vec{b} = (-2, 2\sqrt{3})$ et $\vec{c} = (2, 6, -1)$.
- Soient les vecteurs $\vec{x} = (-2, 5)$ et $\vec{y} = (4, -1)$. Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{z} = 2\vec{x} - 3\vec{y}$ et $\|\vec{x} - \vec{y}\|$.
- Calculez $(4, -1) \cdot (-3, -2)$, $(0, 4) \cdot (9, 0)$ et $(8, -3, 2) \cdot (5, -1, -2)$.
- Soient $\vec{v}_1 = (4, 1)$ et $\vec{v}_2 = (-3, 2)$. Calculez la longueur de la projection de \vec{v}_1 sur \vec{v}_2 .
- Les vecteurs $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ et $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}/2)$ sont-ils orthogonaux ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de λ les vecteurs $(\lambda, -2)$ et $(\lambda, -3\lambda)$ sont-ils orthogonaux ?
- Quelle est la forme générale d'une équation cartésienne d'une droite du plan ?
- Donnez une équation cartésienne de la droite D du plan orthogonale au vecteur $(1/2, \sqrt{3}/2)$ et passant par le point $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$.
- Donnez une équation cartésienne du plan α contenant le point $(-11, 4, 2)$ et normal au vecteur $(6, 5, -1)$.

- Même question qu'au point précédent mais α passe par le point $(2, 5, -6)$ et est parallèle au plan β d'équation $3x - y + 2z - 10 = 0$.
- Même question qu'au point précédent mais α passe par le point $(6, -7, 4)$ et parallèle au plan OXZ .
- Écrivez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point de coordonnées $(-6, 4, -3)$ et parallèle à la droite D' d'équation paramétrique $(x, y, z) = (5 - 3\lambda, -2 + \lambda, 9\lambda + 1)$.
- Écrivez un système d'équations cartésiennes de la droite D perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x - 3y + 7z = 4$ et coupant ce plan au point $(6, 5, 1)$.
- Déterminez la valeur du paramètre réel k pour que le plan $\alpha \equiv x + ky - z + 3 = 0$ soit perpendiculaire au plan $\beta \equiv 2kx - y + 2z = 0$.
- Déterminez la valeur du paramètre réel k pour que la droite $D_1 \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{-y}{2} = z+1$ soit perpendiculaire à la droite $D_2 \equiv \frac{1-x}{2} = -y-3 = \frac{z}{k}$.

8 Systèmes linéaires

8.1 Calcul matriciel

Soit le système

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Ce système est caractérisé par les coefficients des inconnues x, y, z et par les termes indépendants, c'est-à-dire par 12 nombres réels placés à des positions bien déterminées. On peut représenter ce système par le tableau de nombres à 3 lignes et 4 colonnes suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que le tableau M est une matrice de type 3×4 .

Une *matrice* A de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire dont les éléments sont rangés selon m lignes et n colonnes.

On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En abrégé, on écrira $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Les éléments a_{ij} sont appelés les *termes* ou les *coefficients* de la matrice A .

Par exemple, l'élément a_{42} est situé à l'intersection de la 4^e ligne et de la 2^e colonne. Que valent $a_{31}, a_{33}, a_{24}, a_{42}$ dans la matrice M ci-dessus ?

On notera $K^{m \times n}$ l'ensemble des matrices de type $m \times n$ dont les éléments appartiennent à un corps K . Par exemple, K peut être $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$. Ici, nous travaillerons essentiellement dans $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Voici quelques matrices particulières :

- Matrices de type $n \times n$ ou matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices triangulaires supérieures et inférieures :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices de type $1 \times n$ ou matrices lignes : $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

- Matrices de type $n \times 1$ ou matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Comme pour les réels, on peut définir des opérations sur les matrices.

OPÉRATIONS MATRICIELLES :

- *Égalité matricielle* : deux matrices $A(a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si et seulement si elles sont de même type et si

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j.$$

- *Transposition* : la *transposée* d'une matrice A , notée A^t , est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A . Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Notons que $(A^t)^t = A$.

- *Addition* : Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ deux matrices de type $m \times n$. Alors, $A + B = C$ où la matrice C est définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Pour pouvoir additionner deux matrices, il faut donc qu'elles soient de même type. Leur somme s'effectue alors composante par composante et la matrice ainsi obtenue est aussi de type $m \times n$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b & 3+c \\ 4+d & 5+e & 6+f \end{pmatrix}$

- *Produit par un réel* : Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $kA = B$ où la matrice B est définie par $b_{ij} = ka_{ij}$.

Exemple : $-3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & -15 & -18 \end{pmatrix}$

REMARQUE : $\mathbb{R}^{m \times n}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Cela signifie que $+$: $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ et \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfont les propriétés suivantes :

- (1) associativité : $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, (A + B) + C = A + (B + C)$
- (2) neutre : $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A$
- (3) inverse : $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \exists B \in \mathbb{R}^{m \times n}, A + B = B + A = \mathbf{0}$ où

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

désigne la *matrice nulle*.

- (4) commutativité : $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, A + B = B + A$.
On dit alors que $\mathbb{R}^{m \times n}$ est un groupe commutatif.
- (5) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, k(A + B) = kA + kB$
- (6) $\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, (k + r)A = kA + rA$
- (7) $\forall k, r \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, k(rA) = (kr)A$

(8) $\mathbb{1}A = A$ où

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

désigne la *matrice identité*.

- **Produit matriciel** : Pour multiplier deux matrices A et B , l'idée est de multiplier les lignes de A par les colonnes de B . Si A est de type $m \times n$, il faut donc que B soit de type $n \times p$ pour pouvoir envisager le produit AB . Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pr} \end{pmatrix}$$

Alors $AB = C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ où la matrice C est définie par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

Notons que c_{ij} est le produit scalaire de la i^{e} ligne de A avec la j^{e} colonne de B . Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2-1+2 & -3+4 & -2-5 \\ 1-2-6 & -6-12+4 & -1+15+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -7 & -14 & 22 \end{pmatrix}$$

REMARQUES

- Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet,
 - AB peut exister sans que BA soit défini. Prenez, par exemple, A de type 3×4 et B de type 4×2 .
 - AB et BA peuvent exister sans être de même type. Prenez, par exemple, A de type 3×4 et B de type 4×3 .
 - AB et BA peuvent exister, être de même type mais être différentes. Prenez, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (Faites les calculs).
- Le produit matriciel n'est pas simplifiable, c'est-à-dire que $AB = AC$ n'implique pas que $B = C$.

Exemple : Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $AB = AC = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ mais pourtant $B \neq C$.

8.2 Exercices

- Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Trouvez la matrice X telle que $2A - B^t = X$.

- Trouvez la matrice C telle que $A + C = BA$ si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculez, si possible :

$$- \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

— Quelle relation simple existe-t-il entre A et B ?

— Calculez A^2 .

— Déduisez-en B^2 et AB .

8.3 Transformations élémentaires

Revenons au problème de la résolution de systèmes linéaires.

Un système de n équations linéaires à p inconnues est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{12}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement comme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De manière condensée, on notera $A\bar{x} = b$ où $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ et $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. L'ensemble des solutions du système sera noté S . On dit que A est la *matrice des coefficients du système*. A partir de cette matrice, on construit la *matrice augmentée du système*

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$$

C'est la matrice du système complétée par la colonne des termes indépendants, d'où la séparation symbolisée par $|$. À chaque fois que la barre $|$ apparaît dans une matrice, celle-ci sera traitée comme une matrice augmentée. Sinon, la matrice sera considérée comme la matrice des coefficients du système.

À partir d'une matrice augmentée donnée, il est très facile de reconstituer le système qui lui est associé.

Par exemple, soit la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y - 2z = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

La troisième équation nous dit que $z = 2$. Puis, en remontant dans le système, on obtient successivement $y = 1$ puis $x = -9$. Donc, $S = \{(-9, 1, 2)\}$ (Vérifiez en remplaçant dans chaque équation x par -9 , y par 1 et z par 2 .)

Ce système est particulièrement simple à résoudre car sa matrice augmentée a une forme particulière. On dit que c'est une matrice *échelonnée* ou *en escalier*.

Une matrice est *échelonnée* si :

- Dans chaque ligne, le premier élément non nul est 1.
- Dans chaque ligne, le premier élément non nul est strictement plus à droite que dans la ligne précédente.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 2. *Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée.*

Pour échelonner n'importe quelle matrice, on va lui appliquer des transformations élémentaires sur les lignes. De quoi s'agit-il ?

Les transformations élémentaires sur les lignes consistent à

- permuter les deux lignes i et j , ce qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$,
- multiplier tous les éléments de la ligne i par un réel α non-nul, ce qu'on notera $L_i \leftarrow \alpha L_i$,
- ajouter à la ligne i un multiple α de la ligne j , ce qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Voici le procédé à utiliser pour échelonner une matrice :

- (1) Ignorer les éventuelles premières colonnes de zéros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (2) Faire apparaître un élément non nul sur la 1^{re} ligne de la 1^{re} colonne non nulle en permutant les lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

(3) Diviser la 1^{re} ligne par son premier élément non nul.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1/3$$

(4) Ajouter aux autres lignes un multiple convenable de la 1^{re} ligne pour amener des zéros dans la première colonne non nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

(5) Répéter les opérations 1, 2, 3 et 4 sur les lignes suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

Considérons la matrice que l'on vient d'échelonner précédemment et voyons-la comme la matrice augmentée $[A|b]$ du système

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \quad (4)$$

Nous avons transformé cette matrice en la matrice échelonnée

$$[A^*|b^*] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Ici, la dernière ligne de la matrice augmentée ne nous apporte aucune information et la troisième ligne implique que le système ne possède aucune solution. En effet, l'équation $0x + 0y + 0z = 1$ est impossible. On dit que le système est *impossible* et on a $S = \emptyset$.

La question qui se pose est de savoir si les systèmes (1) et (2) possèdent les mêmes solutions. La réponse est positive et est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3. *Si on transforme la matrice augmentée $[A|b]$ d'un système en une matrice échelonnée $[A^*|b^*]$, on obtient alors les équations d'un nouveau système qui possède exactement les mêmes solutions que le système initial.*

Résumons :

$$A\bar{x} = b \longrightarrow [A|b] \longrightarrow [A^*|b^*] \longrightarrow A^*\bar{x} = b^*$$

et \bar{x}_s est solution de $A\bar{x} = b$ ssi \bar{x}_s est solution de $A^*\bar{x} = b^*$.

Exemples :

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6 \end{cases}$$

L'idée est d'échelonner la matrice augmentée du système. On a :

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -6 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array} \right) L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_2 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -5 \end{array} \right) L_3 \leftrightarrow L_3 / -3 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 23/3 & 7 \end{array} \right) L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/23 \end{array} \right) L_4 \leftrightarrow 3/23L_4
\end{array}$$

Pour écrire la solution, il suffit de partir de la dernière ligne de la matrice échelonnée pour trouver la valeur de x_4 et de remonter dans chaque ligne afin de trouver la valeur de x_3 , x_2 puis enfin x_1 . Après calculs, on trouve $S = \{(66/23, 12/23, -34/23, 21/23)\}$. Le système possède donc une unique solution.

$$(2) \begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ x - 3y + z - 2w = 0 \\ 2x + y - 3z + 5w = 0 \end{cases}$$

Remarquons que les termes indépendants de chaque équation valent 0. On dit que c'est un *système homogène*. La solution triviale est toujours solution d'un tel système. Donc, ici, $(0, 0, 0, 0)$ est solution. Est-ce la seule solution ?

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_3 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_2 / -3 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right) L_3 \leftarrow -L_3
\end{array}$$

De la dernière ligne, nous déduisons, $z = -8w$, $y = -7w$ puis $x = -11w$. Nous avons donc exprimé x, y et z en fonction de w . On écrit $S = \{(-11w, -7w, -8w, w) : w \in \mathbb{R}\}$. On dit que le système est *simplement indéterminé*.

$$(3) \begin{cases} 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2
\end{array}$$

Comme la dernière ligne n'est constituée que de zéros, elle ne nous apporte aucune in-

formation. De la deuxième ligne, nous déduisons $y = 1 + 2z - 2t$ et en remplaçant dans la première équation, on obtient $x = -z + 2t$. Nous avons donc exprimé x et y en fonction des deux variables z et t . On a $S = \{(-z + 2t, 1 + 2z - 2t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$. On dit que le système est *doublement indéterminé*.

8.4 Exercices

Résolvez les systèmes suivants

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} mx - y = 2 \\ x + (m + 2)y = m - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

$$(3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 8x_4 - 3x_3 - 8x_2 + 3x_1 - 18 = 0 \\ 5x_3 + 2x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 19 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x + y + az = 2 \\ -3x + 2y + a^2z = 1 \\ 3y = a + 6 \\ 6x - y + 2az = a - 2 \end{cases} \quad \text{où } a \text{ est un paramètre réel.}$$

8.5 Inverse d'une matrice

Pour rappel, considérons dans \mathbb{R} l'équation $ax = b$. Une solution x de cette équation existe si et seulement si soit $a \neq 0$ soit ($a = 0$ et $b = 0$). Si on est dans le cas $a \neq 0$, alors a est inversible et on peut écrire⁸

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

c'est-à-dire

$$1 \cdot x = a^{-1}b$$

ou encore $x = b/a$.

8. On utilise ici la commutativité de « \cdot » dans \mathbb{R} .

Dans ce qui vient d'être fait, on peut considérer x comme une matrice de type 1×1 et se demander si on peut généraliser ce procédé à une matrice de type $n \times n$. Autrement dit, soit le système $A\bar{x} = b$ où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, peut-on trouver une matrice \tilde{A} telle que $\bar{x} = \tilde{A}b$, c'est-à-dire une matrice pour laquelle on a la relation $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \mathbb{1}$? On dit que la matrice \tilde{A} est la matrice inverse de A . Quand elle existe, cette matrice inverse est unique et on la note A^{-1} . Nous verrons au paragraphe suivant ce qui garantit l'existence de la matrice inverse.

Pour le moment, nous sommes intéressés par trouver un procédé qui permet d'inverser une matrice. Les transformations élémentaires vont nous aider.

Examinons : soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et la matrice identité} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons à chaque matrice la transformation élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

$$\text{On obtient les matrices } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } I^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous constatons que $I^*A = A^*$ (Faites les calculs).

De manière générale, appliquer une transformation élémentaire de lignes à une matrice A revient à multiplier à gauche cette matrice par la matrice identité $\mathbb{1}$ dans laquelle on a effectué la même transformation.

Méthode de la matrice compagnon :

Nous allons appliquer simultanément les mêmes transformations à la matrice A et à la matrice identité. Lorsque nous aurons transformé A en la matrice identité dans la colonne de gauche, nous aurons obtenu la matrice inverse dans la colonne de droite. En effet, considérons les n transformations élémentaires nécessaires pour transformer A en l'identité. Nous avons :

- A et $\mathbb{1}$ au départ.
- Après la première transformation, nous avons : $A_1 = T_1A$ et $I_1 = T_1\mathbb{1}$ où T_1 est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation 1,
- Après la deuxième transformation, nous avons : $A_2 = T_1A_1$ et $I_2 = T_2\mathbb{1}$ où T_2 est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation 2,
- etc.
- Après la n^{e} transformation, nous avons : $\mathbb{1} = T_nA_{n-1}$ et $I_n = T_nI_{n-1}$ où T_n est l'identité dans laquelle on a appliqué la transformation n .

On sait que $\mathbb{1} = T_nT_{n-1} \cdots T_1A$. D'autre part, la matrice inverse vérifie $A^{-1} = \mathbb{1}A^{-1}$, c'est-à-dire $A^{-1} = T_nT_{n-1} \cdots T_1AA^{-1} = T_n \cdots T_1\mathbb{1} = I_n$.

Exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ -13 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 / (-2) & \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ 13/2 & -3 & 5/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}
 \end{array}$$

Application : résolvez le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ x + 5z = -4 \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité par la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ 13/2 & -3 & 5/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ 13/2 & -3 & 5/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour terminer ce paragraphe, nous allons établir par calcul la forme générale de l'inverse d'une matrice 2×2 .

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on cherche une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, nous cherchons à résoudre les deux systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad (6)$$

et

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Après calculs (faites les détails !), on trouve comme solutions des systèmes (6) et (7) :

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc}, \quad t = \frac{a}{ad - bc}.$$

Dès lors, pour pouvoir inverser la matrice A , il apparaît la condition d'existence $ad - bc \neq 0$. Alors, nous pouvons écrire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/(ad - bc) & -b/(ad - bc) \\ -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{pmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* du système, noté $\det A$, puisqu'il détermine, en quelque sorte, le nombre de solutions du système. En effet, considérons un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est-à-dire un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by = t \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système. On a $\det A = ad - bc$.

Géométriquement, résoudre ce système revient à étudier les positions des droites D_1 et D_2 d'équations respectives $ax + by = t$ et $cx + dy = s$.

- Si $\det A \neq 0$, alors le système possède une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

Géométriquement, cela signifie que les droites D_1 et D_2 sont sécantes en un point.

- Si $\det A = 0$, c'est-à-dire si $a/c = b/d$ alors la matrice A du système n'est pas inversible. Géométriquement les droites D_1 et D_2 sont soit confondues soit parallèles distinctes. Cela dépend du rapport e/f .
 - Si $a/c = b/d = e/f$, alors les deux droites sont confondues. La solution du système est une droite et le système est indéterminé.
 - Si $a/c = b/d \neq e/f$, alors les deux droites sont parallèles distinctes et il n'y a donc pas de solution. Le système est impossible.

8.6 Exercices

(1) Inversez, si possible, les matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Résolvez le système

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

8.7 Déterminants

Déterminants d'ordre 2

Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, on définit

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26$

Déterminants d'ordre 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, on définit

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{31} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31} \end{aligned}$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A .

On aurait très bien pu regrouper les termes différemment, ce qui revient à développer le déterminant suivant une autre ligne ou une autre colonne. Par exemple, suivant la 2^e ligne, on obtient $\det A = -a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23}$.

En général, on préférera développer un déterminant suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

Par exemple, $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$. Ici, on a développé par rapport à la deuxième colonne car elle contient deux zéros.

Déterminants d'ordre n

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En généralisant ce qui a été fait précédemment, on peut par exemple développer $\det A$ suivant la première colonne pour obtenir

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} \end{aligned}$$

Conclusion :

- Suivant la j^{e} colonne : $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$
- Suivant la i^{e} ligne : $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$

EXEMPLE : Remarquons par exemple que le déterminant d'une matrice 5×5 nécessite le calcul de 5 déterminants 4×4 , donc de 20 déterminants 3×3 , ou encore de 60 déterminants 2×2 . Plus généralement, le calcul d'un déterminant d'ordre n demandera le calcul de $n!/2$ déterminants 2×2 , ce qui peut s'avérer très long, sans compter les éventuelles erreurs de calculs.

Nous allons établir des propriétés qui faciliteront le calcul des déterminants.

PROPRIÉTÉS :

- La valeur d'un déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes entre elles.

Conséquence : Un déterminant qui possède deux lignes ou deux colonnes identiques est nul. (Voyez-vous pourquoi ?)

- Dans un déterminant, on peut mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne.

Par exemple, $\begin{vmatrix} 14 & 21 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$. Faites attention, $r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix}$ ou bien $r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & rb \\ c & rd \end{vmatrix}$ ou bien... Que vaut $\begin{vmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{vmatrix}$?

Conséquence : si deux colonnes ou deux lignes d'un déterminant sont proportionnelles, alors il vaut 0. (Voyez-vous pourquoi ?)

Par exemple : $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$

- La valeur d'un déterminant ne change pas si on lui applique la transformation élémentaire $L_i \leftarrow a_1L_1 + a_2L_2 + \dots + L_i + \dots + a_nL_n$.

Exemples :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} && \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 \end{aligned} \\ &= (a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ & && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

Généralisons : Posons $V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$

Ce déterminant est appelé **déterminant de Vandermonde**.

On a $V_n = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$. Pour prouver cette formule, on montre par récurrence sur n que $V_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1) \dots (a_2 - a_1)V_{n-1}$.

8.8 Exercices

- (1) Soit A une matrice 3×3 . Posons $\det A = \delta$. Que vaut le déterminant de la matrice
- $B = kA$ où $k \in \mathbb{R}$?
 - C obtenue en multipliant les termes de la 1^{re} colonne de A par $3k$, ceux de la 2^e colonne par $-5k^2$ et en divisant ceux de la 3^e colonne par 4 ?

- (2) Montrez, sans les développer, que les déterminants suivants sont nuls.

- $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 y & \cos^2 y \\ 1 & \sin^2 z & \cos^2 z \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ab \\ ba & c^2 & b^2 \\ ac & ab & cb \end{vmatrix}$

- (3) Calculez les déterminants suivants. Énoncez les propriétés que vous utilisez.

- $\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n(n+1) \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2) \\ 1 & n+3 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 2a & a+b & 2 \\ b & b & 1 \\ 4b & 3b & 2 \end{vmatrix}$$

(4) Utilisez le déterminant de Vandermonde pour calculer les déterminants suivants :

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(5) Calculez

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

8.9 Systèmes de Cramer

Nous avons vu au paragraphe précédent une méthode permettant de trouver l'inverse d'une matrice, si elle existe. Nous aimerions savoir sous quelle(s) condition(s) cet inverse existe et s'il existe une « formule » qui fournit la forme générale de la matrice inverse.

Soit la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det A} & \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{n+2} \det A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \dots & (-1)^{2n} \det A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

En effet, calculons, par exemple l'élément situé en 1^{re} ligne et 2^e colonne (le calcul est identique pour les autres éléments. Faites-le). On a :

$$a_{12} \det A_{11} - a_{22} \det A_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n2} \det A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{22} & a_{22} & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 4. *Une matrice A de type $n \times n$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.*

De plus, si A est inversible, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{n+2} \det A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \dots & (-1)^{2n} \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle *système de Cramer* tout système linéaire de n équations à n inconnues $A\bar{x} = b$ tel que $\det A \neq 0$.

Considérons un système de Cramer. Alors, on a $\bar{x} = A^{-1}b$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_1 & -\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{n+2} \det A_{n2} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \dots & (-1)^{2n} \det A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Théorème 5. *Tout système de Cramer a une unique solution (x_1, \dots, x_n) donnée par*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i^e colonne de la matrice A par celle des termes indépendants.

Exemple : soit le système
$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $\det A = -10$.

C'est donc un système de Cramer et sa solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix}}{-10} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 20 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix}}{-10} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & 10 & 20 \end{vmatrix}}{-10} = 1$$

Donc, $S = \{(0, 11, 1)\}$.

Nous pouvons interpréter géométriquement cette solution. En effet, résoudre un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues revient à étudier les positions relatives de 3 plans de l'espace. Examinons les différentes possibilités.

Considérons le système

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Aux trois équations de ce système correspondent les équations de trois plans, notés respectivement α_1 , α_2 et α_3 . Nous allons discuter les positions de ces trois plans en termes de leurs vecteurs gradients $\vec{v}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ pour $i = 1, 2, 3$.

Plusieurs situations peuvent se présenter.

- α_1 et α_2 sont confondus. Cela signifie que leurs gradients respectifs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont proportionnels et que cette proportion est également respectée par les termes indépendants. Autrement dit, $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ et $b_1 = kb_2$ pour un certain k dans \mathbb{R} . On dit que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont des *vecteurs colinéaires*.

La solution dépend alors de la position du troisième plan.

- Soit $\alpha_3 = \alpha_1$. Alors, alors les trois plans sont confondus. Cela signifie que les trois vecteurs gradients sont colinéaires.

La solution est un plan et le système est donc doublement indéterminé.

- Soit α_3 et α_1 sont parallèles distincts. Cela signifie que les gradients sont proportionnels mais que cette proportion n'est pas respectée par les termes indépendants.

Le système est donc impossible.

- Soit α_3 coupe α_1 selon une droite notée D_{13} . Cela signifie que les gradients ne sont pas colinéaires.

La solution est une droite et le système est donc simplement indéterminé.

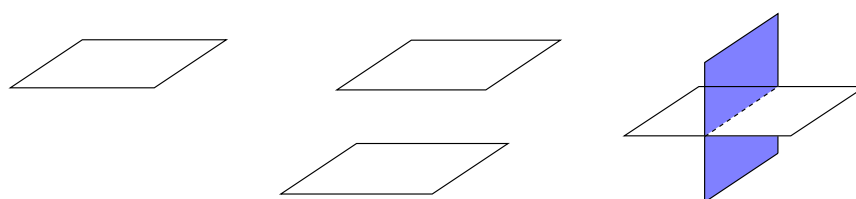


FIGURE 10 – Les 3 situations

- α_1 et α_2 sont parallèles distincts. Dans ce cas, on a encore une relation de la forme $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ mais cette fois $b_1 \neq kb_2$.
Dans ce cas, quelle que soit la position du troisième plan, le système est impossible.
- α_1 et α_2 sont sécants. Alors \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires et les deux plans se coupent selon une droite notée D_{12} . De nouveau, la solution dépend de la position du troisième plan.
 - Soit α_3 et D_{12} sont parallèles et $\alpha_3 \cap D_{12} = \emptyset$. Cela signifie que les vecteurs gradients \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 sont situés dans un même plan. Autrement dit, ils vérifient une relation de la forme $\vec{v}_3 = k\vec{v}_1 + r\vec{v}_2$ pour certains $k, r \in \mathbb{R}$ mais cette relation n'est pas respectée par les termes indépendants. Des vecteurs qui vérifient ce type de relations sont dits *linéairement dépendants*. Dans ce cas, le système est impossible.
 - Soit α_3 contient D_{12} . Cela signifie que les gradients sont linéairement dépendants et que les termes indépendants vérifient la même relation de dépendance que les gradients. La solution est la droite D_{12} et le système est simplement indéterminé. La figure ci-dessous illustre les deux dernières situations où, par facilité, on a projeté les différents objets dans le plan de la feuille.
 - Soit α_3 coupe D_{12} . Cela signifie que les gradients sont *linéairement indépendants*, c'est-à-dire qu'ils ne vérifient aucune relation de la forme ci-dessus. La solution est le point d'intersection des trois plans et le système possède donc une unique solution. C'est un système de Cramer.

Exemple : résolvez et discutez, en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} x + (m-1)y + (2m-3)z = 1 \\ mx + 2(m-1)y + 2z = 2 \\ (m+1)x + 3(m-1)y + (m^2-1)z = 3 \end{cases}$$

Interprétez géométriquement les résultats.

Soit A la matrice du système. On a $\det A = -m(m-1)(m-2)^2$ (Faites les calculs en utilisant les propriétés des déterminants).

- 1^{er} cas : $\det A \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq 2$.
On est alors dans le cas d'un système de Cramer. Après calculs, l'unique solution du système est $(0, 1/(m-1), 0)$.
Géométriquement, les trois équations du système sont celles de trois plans sécants au point $(0, 1/(m-1), 0)$.
- 2^e cas : $\det A = 0$, c'est-à-dire $m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = 2$.

— $m = 0$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ -2y + 2z = 2 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

Les gradients sont linéairement dépendants. En effet, $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. De plus, cette relation est respectée par les termes indépendants puisque $b_3 = b_1 + b_2$. On est dans la situation où les plans α_1 et α_2 se coupent selon une droite D_{12} contenue dans le plan α_3 .

Après calculs (faites les en utilisant la méthode de votre choix), on trouve comme solution du système l'ensemble $S = \{(4z, z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}$. C'est la droite dont un vecteur directeur est $(4, 1, 1)$ et passant par le point $(0, -1, 0)$. Le système est donc simplement indéterminé.

— $m = 1$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x + 2z = 2 \\ 2x = 3 \end{cases}$$

De la troisième équation, on déduit $x = 3/2$. En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $z = 1/2$ mais alors la première équation n'est pas satisfaite. Géométriquement, cela signifie que les trois plans n'ont pas d'intersection commune. Le système est impossible.

— $m = 2$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Les trois plans sont confondus. La solution du système est l'ensemble $S = \{(1 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. C'est un plan. Le système est donc doublement indéterminé.

8.10 Exercices

(1) Résolvez les systèmes suivants par la méthode de Cramer

$$\begin{array}{l} \blacksquare \begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \\ \blacksquare \begin{cases} 6x + 5y + 4z = 1 \\ 14x - 2y - 3z = 5 \\ 8x - 3y - z = 8 \end{cases} \end{array}$$

(2) Discutez l'existence de solutions (et calculez-les quand elles existent) pour les systèmes suivants en fonction des paramètres réels a, b, c, d, m . Interprétez géométriquement vos résultats.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 2m \\ (m + 1)x + my + z = m \end{cases} \\ \blacksquare \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\ \blacksquare \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases} \\ \blacksquare \begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases} \\ \blacksquare \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \end{array}$$

Index

- addition
 - matricielle, 45
- antisymétrie, 22
- appartenance
 - ensemble, 15
- atomique
 - proposition, 3
- binôme
 - de Newton, 21
- binomial
 - coefficient, 16
- borné
 - intervalle, 22
- cardinalité, 15
- coefficient
 - binomial, 16
- coefficient angulaire, 24
- coefficients d'une matrice, 44
- colinéaires (vecteurs), 64
- complémentaire, 16
- compréhension
 - déf. ensemble, 15
- conjonction, 3
- connecteur logique, 3
- contraposée, 4
- croissant, 23
- decroissant, 23
- déterminant, 57
- directeur (vecteur), 41
- disjoint
 - ensembles, 16
 - intervalles, 26
- disjonction, 3
- domaine
 - prédicat, 6
- doublement indéterminé (système), 54
- dérivée
 - d'une fonction affine, 24
- échelonnée (matrice), 49
- égalité
 - d'ensemble, 15
 - matricielle, 45
 - relation avec l'ordre, 22
- élément
 - d'un ensemble, 15
- en escalier (matrice), 49
- ensemble, 15
 - des solutions, 26
- équation
 - cartésienne, 41
 - paramétrique, 41, 42
- équivalence, 3
 - formules, 4
- événement
 - aléatoire, 15
- expérience
 - aléatoire, 14
- extension
 - déf. ensemble, 15
- factorielle, 16
- fonction
 - affine, 24
 - croissante, 23
 - décroissante, 23
 - strictement croissante, 23
 - strictement décroissante, 23
- formule
 - premier ordre, 6
 - propositionnelle, 3
- gradient, 35
- graphe d'une fonction, 24
- homogène (système), 52
- identité
 - fonction, 24
 - matrice, 46

- implication, 3
- impossible (système), 51
- inclusion, 15
- inconnue, 26
- intersection, 16
- intervalle, 22
 - borné, 22
 - non borné, 22
- Leibniz
 - règle, 21
- linéairement
 - dépendants, 65
 - indépendants, 65
- logique
 - connecteur, 3
- méthode de la matrice compagnon, 55
- matrice
 - échelonnée, 49
 - augmentée du système, 48
 - compagnon, 55
 - définition, 43
 - déterminant, 57
 - des coefficients du système, 48
 - égalité, 45
 - identité, 46
 - nulle, 45
 - produit, 46
 - produit par un scalaire, 45
 - transposée, 45
- monotone, 23
- négation, 3
- Newton
 - binôme, 21
- non-orienté
 - intervalle, 22
- normal, 35, 41
- norme, 34
- ordre, 22
- pente, 24
- polygone des contraintes, 36
- polynôme du second degré, 25
- prédicat
 - domaine, 6
 - univers, 6
- probabilité, 15
- produit
 - matriciel, 46
 - par un scalaire, 45
 - scalaire, 34
- proposition, 3
- prédicat, 6
- quantificateur
 - existentiel, 6
 - universel, 6
- réciproque, 4
- réflexivité, 22
- résoudre
 - inéquation, 26
- simplement indéterminé (système), 53
- solution
 - ensemble, 26
- strictement croissant, 23
- strictement décroissant, 23
- système
 - de Cramer, 63
 - doublement indéterminé, 54
 - homogène, 52
 - impossible, 51
 - matrice augmentée, 48
 - matrice des coefficients, 48
 - simplement indéterminé, 53
- système d'équations cartésiennes, 42
- table de vérité, 3
- tautologie, 4
- termes d'une matrice, 44
- transformations élémentaires
 - sur les lignes, 49
- transitivité, 22
- transposée, 45

transposition, 45

union, 15

univers

 expérience aléatoire, 14

 prédicat, 6

valeur absolue, 24

vecteur

 colinéaires, 64

 directeur, 41

 gradient, 35

 linéairement dépendants, 65

 linéairement indépendants, 65

 normal, 35, 41

 norme, 34

 produit scalaire, 34

vide

 ensemble, 15