Mathématique Élémentaire
Exercices supplémentaires

Question 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Voici cinq affirmations concernant x et y :

(a) $P(x) \equiv 0 \leqslant x$

(b) $Q(x) \equiv x \leqslant 2$

(c) $R(y) \equiv 0 \leqslant y$

(d) $S(y) \equiv y \leqslant 8$

(e) $T(x,y) \equiv x^3 \leqslant y$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

- $(P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow (R(y) \wedge S(y))$
- $(P(x) \wedge Q(x) \wedge S(y)) \Longrightarrow R(y)$
- $(S(y) \wedge T(x,y)) \Longrightarrow P(x)$
- $(S(y) \wedge T(x,y)) \Longrightarrow Q(x)$
- $(S(y) \wedge T(x,y)) \Longrightarrow R(y)$

Question 2. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Question 3. Montrez que deux nombres complexes sont conjugués si et seulement si la somme et le produit de ces nombres sont réels.

Question 4. On dit que deux matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ commutent si $MN = NM$.
Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices inversibles qui commutent. Montrez que A^{-1} et B commutent.

Question 5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrez la proposition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant b + \varepsilon) \Longrightarrow (a \leqslant b).$$

Question 6. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan π d'équation $2x + 3y = z - 5$ et contenant la droite D passant par le point $(1,1,2)$ et de vecteur directeur $(1,2,1)$.

Question 7. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les étapes qui ont mené à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète) :

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2-4}, \qquad g : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\cos x + 1},$$

$$h : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x^2}, \qquad \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{|x+1|}.$$

Question 8. Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\boldsymbol{i}^{k-1} = \frac{\boldsymbol{i} - n\boldsymbol{i}^n - (n+1)\boldsymbol{i}^{n+1}}{2}.$$

Question 9. Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrez, par l'absurde, que si $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, alors $x\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Question 10. Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - x$ et $h(x) = 2x$. Montrez que

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Peut-on affirmer qu'on a cette relation quelles que soient les fonctions f, g et h ?

Question 11. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel m.

$$\begin{cases} mx + y + mz = 1 \\ x + my + mz = 1 \\ mx + my + z = 0 \end{cases}$$

Précisez s'il s'agit d'un système impossible, indéterminé,... Interprétez géométriquement vos résultats.

Question 12. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez le déterminant de A.

Question 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

(c) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

- Calculez $f(0), f(1), f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
- Calculez $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Montrez que $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0)$.

Question 14. Examen du 7 janvier 2002, question 9.

Question 15. Soit $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $t = \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$.

- Prouvez que $\Re\mathrm{e}(t) = 0$ et $\Im\mathrm{m}(t) = 0$ ssi $ab \neq 0$.
- Donnez la forme trigonométrique de t sachant que celle de z est $\rho(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$.