Mathématique Élémentaire

Examen

(28 octobre 2019)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Exceptionnellement, vous ne devez pas justifier votre réponse. /2

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{1,2,1,2\} \cap \{3,1\} = \{1,1\}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{3,2,1\} \cap \{1,2,3\} = \{2\}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^7 + 3x^5 + 3x^3 + 1 = 0\}$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Question 2. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). On considère l'ensemble S défini ci-dessous. /1

$$S = \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; (1 \leqslant n \leqslant 8) \wedge (n \text{ est impair } \Rightarrow\ n^2 \text{ est un multiple de } 3)\big\}.$$

(a) ☐ $S = \{2,4,6,8\}$

(b) ☐ $S = \{\}$

(c) ☐ $S = \{3\}$

(d) ☐ $S = \{2,3,4,6,8\}$

(e) ☐ $S = \{2,3,4,6,7,8\}$

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3.

/4

(a) Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par le point $(-1,3)$ et perpendiculaire à la droite D_1 passant par les points $(-5,-2)$ et $(3,-4)$.

(b) Donnez une équation paramétrique de la droite D' de pente 3 et dont l'ordonnée à l'origine vaut -7.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Écrivez l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \Rightarrow |x+3| \leqslant 1\}$ sous la forme d'une union disjointe d'intervalles. Détaillez et justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

/3

Mathématique Élémentaire

Examen (28 octobre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

On note $P(n)$ le prédicat « $n^3 - n$ est un multiple de 3 ». Vous trouverez ci-dessous ce qu'un étudiant à écrit pour prouver, par induction, l'affirmation $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

- **Cas de base :** On doit prouver que $P(0)$ est vraie.

  Prouver que $P(0)$ est vraie revient à prouver que 0 est un multiple de 3. Ce qui est clairement vrai, car $0 = 3 \cdot 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$.

- **Cas général :** On doit prouver que $\forall k \in \mathbb{N}\ \big(P(k) \Rightarrow P(k+1)\big)$.

  Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(k)$ est vraie. On suppose donc que $k^3 - k$ est un multiple de 3. Il s'agit de l'hypothèse d'induction.

  On doit montrer que $P(k+1)$ est vraie. On doit donc montrer que $(k+1)^3 - (k+1)$ est un multiple de 3. On a :

  $$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3k^2 + 3k = (k^3 - k) + 3(k^2 + k).$$

  Par hypothèse d'induction, on sait que $k^3 - k$ est un multiple de 3. On a clairement que $3(k^2 + k)$ est un multiple de 3, car $k^2 + k \in \mathbb{Z}$, vu que $k \in \mathbb{N}$. Vu que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3, on peut conclure que $P(k+1)$ est vraie.

(a) ☐ La preuve est correcte.

(b) ☐ La preuve du cas de base n'est pas correcte.

(c) ☐ La traduction de $P(k)$ en français n'est pas correcte.

(d) ☐ La traduction de $P(k+1)$ en français n'est pas correcte.

(e) ☐ La preuve que $\forall k \in \mathbb{N}\ \big(P(k) \Rightarrow P(k+1)\big)$ est vérifiée n'est pas correcte.

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 6. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

On note $P(x,y)$ le prédicat $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$. On note φ la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad P(x,y)$.
Un étudiant a écrit la liste d'arguments ci-dessous pour justifier que la formule φ est vraie.

Afin de prouver que la formule φ est vraie, nous allons utiliser une preuve par l'absurde.
Nous commençons donc par nier la formule φ.
La négation de la formule φ est la formule $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad (x+y)^2 = x^2 + y^2$.
On sait que la formule correcte est $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Il a donc une contradiction à affirmer que $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, ce qui termine la preuve.

(a) ☐ φ est vraie et la preuve est correcte.

(b) ☐ φ est vraie, mais dans une preuve par l'absurde, il ne faut pas nier ce que l'on veut prouver.

(c) ☐ φ est vraie, mais la négation de la formule φ n'est pas correcte.

(d) ☐ φ est vraie, mais la contradiction proposée n'est pas une véritable contradiction.

(e) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

/3

(a) Donnez explicitement la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par $M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot 2^i \cdot j$.

(b) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, l'inverse de A et $B \cdot C$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. /5

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Définissez « f est une fonction croissante sur A ».

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Définissez « f est une fonction décroissante sur A ».

- Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case correspondante selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Vous ne devez pas justifier vos réponses.

  (a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est croissante.
  (b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est croissante.
  (c) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_3 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est décroissante.
  (d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est croissante.
  (e) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_5 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante.
  (f) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est décroissante.
  (g) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_7 :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est décroissante.
  (h) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f_8 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est décroissante.

Question 9. Soit $\xi \geqslant 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Donnez une propriété équivalente à $\sqrt{\xi} \leqslant u$ qui ne fait plus intervenir de racine carrée. /4

$$\sqrt{\xi} \leqslant u \quad \Leftrightarrow$$

Justifiez votre réponse.
$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'intervalle $]1,4[$ est inclus dans l'intervalle $[2,5]$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^4 est pair.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, $(x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

/4

(a) Donnez une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$. Cette droite sera notée D.

(b) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite D trouvée au point précédent.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Résolvez l'inéquation

/7

$$\frac{1}{\sqrt{x+6}-x} \leqslant \frac{1}{x+3}. \tag{1}$$

Détaillez et justifiez vos calculs.[1]

[1]Pour vous aider à situer rapidement les divers nombres les uns par rapport aux autres, nous vous donnons l'information que $\sqrt{73} \approx 8{,}544$. Ceci ne vous dispense pas de montrer rigoureusement les inégalités que vous affirmez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

/3

$$\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! \;=\; (n+1)! - 1.$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 14. Soient les droites $D_1 \equiv \lambda x + 2y = 4$ et $D_2 \equiv \lambda x + (\lambda+1)y = \lambda + 3$ où λ est un paramètre réel. Donnez l'ensemble $D_1 \cap D_2$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. /5