Mathématique Élémentaire

Examen (08 janvier 2020)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Exceptionnellement, vous ne devez pas justifier votre réponse. /2

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{1,2,3,2,1\} \cap \{2,3,1\} = \{1,2,1\}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{3,2,1\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\varnothing \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid 4x^8 + 7x^4 + 5x^2 + 3x + 1 = 0\}$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Question 2. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). On considère l'ensemble S défini ci-dessous. /1

$$S = \big\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, (1 \leqslant n \leqslant 9) \wedge (n \text{ est pair } \Rightarrow\ (n+1)^2 \text{ est pair })\big\}.$$

(a) ☐ $S = \{2,4,6,8\}$

(b) ☐ $S = \{1,3,5,7,9\}$

(c) ☐ $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(d) ☐ $S = \{\}$

(e) ☐ $S = \{1,3,5,7,8,9\}$

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

/4

(a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(-2,-1)$ et perpendiculaire à la droite D dont une équation paramétrique est $(x,y) = (2-3\lambda, \lambda-4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 parallèle à la droite D' d'équation $-5x+y = 3x+2-2y$ et dont l'ordonnée à l'origine vaut -3.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On note $P(n)$ le prédicat « $n^3 - n$ est un multiple de 3 ».
Prouvez, par induction, l'affirmation $\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n)$.

/4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/5

(a) Donnez explicitement la matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ définie par $A_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{si } i > j, \\ 42 & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) Calculez, si possible,

- $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$

(c) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $\det A \neq 0$. On dit que A est une matrice *orthogonale* si la transposée de A est égale à son inverse.

Montrez que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

On note $P(x,y)$ le prédicat $x^2+y^2=-1$. On note φ la formule $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$.
Un étudiant a écrit la liste d'arguments ci-dessous pour justifier que la formule φ est fausse.

> Afin de prouver que la formule φ est fausse, nous allons prouver que sa négation est vraie.
> La négation de la formule φ est la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2+y^2 \neq -1$.
> On choisit $x=1$ et $y=2$, on a bien que $1 \in \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R}$ et $1^2+2^2=5 \neq -1$. On a donc bien montré que la négation de la formule φ était fausse, ce qui termine la preuve.

(a) ☐ φ est vraie.

(b) ☐ φ est fausse et la preuve est correcte.

(c) ☐ φ est fausse, mais il y a un problème dans la première ligne de la preuve.

(d) ☐ φ est fausse, mais la négation de la formule φ n'est pas correcte.

(e) ☐ Il est faux d'affirmer que $1^2+2^2=5 \neq -1$.

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Une brève justification doit être donnée pour chacun de vos choix (qui peut se limiter à « règle vue au cours », pour autant que ce soit évidemment le cas !) /4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x^m)^n = x^{mn} = x^{m^n}$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in [0,+\infty[,\ x \geqslant y \Rightarrow xz \geqslant yz$

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in [0,+\infty[,\ xz \geqslant yz \Rightarrow x \geqslant y$

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ \forall y \in \,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y} \Rightarrow x \leqslant y$

Question 8. Soit $\xi \geqslant 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Donnez une propriété équivalente à $\sqrt{\xi} \leqslant u$ qui ne fait plus intervenir de racine carrée. /4

$\sqrt{\xi} \leqslant u \quad \Leftrightarrow$ ☐

Justifiez votre réponse.

$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

Un étudiant a écrit la liste d'arguments ci-dessous pour prouver que dès que l'on choisit n points quelconques de $\mathbb{R}^2$ (avec $n \geqslant 1$), il existe au moins une droite qui contient ces n points.

On va prouver, par induction sur n que dès que l'on choisit n points de $\mathbb{R}^2$, il existe au moins une droite qui contient ces n points.

- **Cas de base :** Pour prouver le cas de base, il suffit de prouver qu'étant donné un point $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une droite qui contient ce point.

  Pour cela, on considère la droite D d'équation $y = x + y_1 - x_1$. On a clairement que la droite D contient le point (x_1, y_1).

- **Cas général :** Par hypothèse d'induction, on suppose que dès que l'on choisit k points de $\mathbb{R}^2$, il existe au moins une droite qui contient ces k points.

  On doit montrer que si l'on choisit maintenant $k+1$ points de $\mathbb{R}^2$, il existe au moins une droite qui contient ces $k+1$ points.

  On considère les $k+1$ points $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$. On doit montrer qu'il existe une droite qui passe par ces $k+1$ points.

  Par hypothèse d'induction, il existe une droite D_1 qui contient les k premiers points : $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_k, y_k)$.

  Toujours par hypothèse d'induction, il existe une droite D_2 qui contient les k derniers points : $(x_2, y_2) \ldots (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$.

  Tous les points $(x_2, y_2) \ldots (x_k, y_k)$ sont à la fois sur la droite D_1 et sur la droite D_2. On a donc nécessairement que $D_1 = D_2$. On a donc trouvé une droite $D_1 = D_2$ qui contient les $k+1$ points.

(a) ☐ La preuve est correcte.

(b) ☐ L'énoncé du cas de base n'est pas correct.

(c) ☐ Dans le cas de base, il est faux d'affirmer que la droite D contient le point (x_1, y_1).

(d) ☐ L'énoncé du cas général n'est pas correct.

(e) ☐ Une des deux utilisations de l'hypothèse d'induction n'est pas correcte.

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Résolvez l'inéquation :

/4

$$\big||x|-1\big| \leqslant \frac{x+1}{3} \tag{1}$$

Détaillez et justifiez vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Examen (08 janvier 2020)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit A l'ensemble donné par $]1,6[\cap\mathbb{N}$. On a que $A \subseteq [2,5]$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si $3n+3$ est impair.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^5 est impair.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, $(x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow x \cdot y \notin \mathbb{Q}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ \lambda x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

/6

où λ est un paramètre réel.

(a) Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

(b) Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.