Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(23 septembre 2019)

Correction

Question 1. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). On considère P et Q deux propositions.*

(a) ☐ *La formule $P \vee Q$ est une tautologie.*

(b) ☐ *La formule $P \wedge Q$ est une tautologie.*

(c) ☐ *La formule $P \Rightarrow Q$ est une tautologie.*

(d) ☐ *La formule $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie.*

(e) ☑ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 2. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier).*
La négation de la phrase Si trois est pair, alors quatre est impair *est la phrase*

(a) ☐ Si trois est pair, alors quatre n'est pas impair.

(b) ☐ Si trois n'est pas pair, alors quatre n'est pas impair.

(c) ☐ Si trois n'est pas pair, alors quatre est impair.

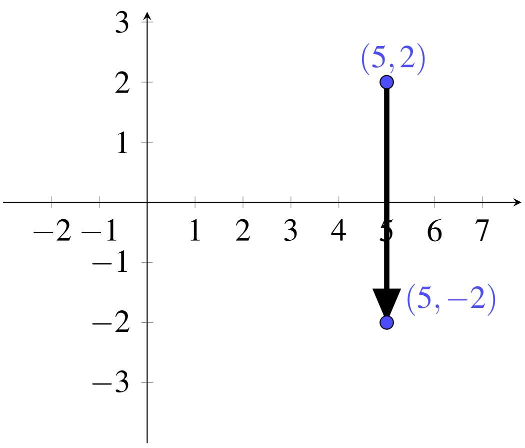
(d) ☐ Trois n'est pas pair et quatre n'est pas impair.

(e) ☑ Trois est pair et quatre n'est pas impair.

(f) ☐ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 3.

(a) *Donnez les composantes du vecteur v dont l'origine est le point* $(5,2)$ *et l'extrémité est le point* $(5,-2)$. *Expliquez votre démarche.*



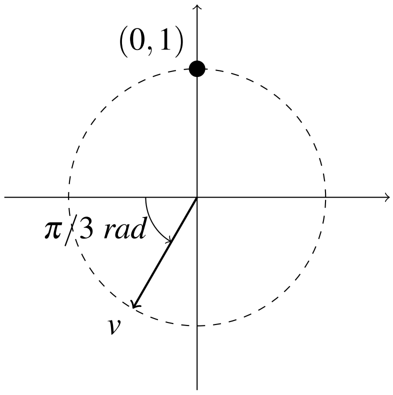
Les composantes du vecteur sont $(5,-2)-(5,2) = (5-5,-2-2) = (0,-4)$.

(b) *Soient les vecteurs $u = (0,-3)$ et $v = (4,-1)$. Calculez*

- $2v-u = 2(4,-1)-(0,-3) = (8,-2)+(0,3) = (8,1)$
- $(u|-3v) = ((0,-3)|-3(4,-1)) = ((0,-3)|(-12,3)) = 0(-12)+(-3)3 = 0-9 = -9$
- $\|u-v\| = \|(0,-3)-(4,-1)\| = \|(0-4,-3+1)\| = \|(-4,-2)\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2}$
  $= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- *la distance entre u et v :* c'est $\|u-v\|$, calculée au point précédent, c'est donc $2\sqrt{5}$.

(c) *Donnez les composantes du vecteur v défini sur la figure ci-contre. Expliquez votre démarche.*

Voir la correction du test 2, 21 septembre 2015, question 5.



Question 4. *A-t-on que $x=-1$ est solution de l'inéquation*

$$\frac{x+4}{x+2}+1 \leqslant \frac{x-3}{x+7} \text{ ?} \tag{1}$$

Justifiez votre réponse.

On remplace x par -1 et on regarde si l'égalité est vérifiée. La substitution de x par -1 donne $\frac{-1+4}{-1+2}+1 \leqslant \frac{-1-3}{-1+7}$ c'est-à-dire $4 \leqslant \frac{-4}{6}$. Cette dernière inégalité étant fausse, -1 n'est pas solution.

Question 5. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{x}{x+4} \leqslant 7. \tag{2}$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Les conditions d'existence de cette inéquation sont $x+4 \neq 0$, c'est-à- dire $x \neq -4$.
Distinguons deux cas :

(a) Si $x+4>0$, c'est-à-dire si $x>-4$, (2) est équivalent à $x \leqslant 7(x+4)$ ou encore $-28 \leqslant 6x$. Ceci est équivalent à $x \geqslant -\frac{14}{3}$. Comme nous sommes dans le cas où nous ne discutons que des valeurs plus grandes que -4 et que $-\frac{14}{3} < -4$, les solutions de (2) pour ce cas sont tous les $x > -4$, c'est-à-dire $x \in]-4,+\infty[$.

(b) Si $x+4<0$, c'est-à-dire si $x<-4$, (2) devient $x \geqslant 7(x+4)$. Par des calculs similaires aux précédents, cette inégalité se réduit à $x \leqslant -\frac{14}{3}$. Comme toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité sont inférieures à -4, les solutions pour ce cas sont les $x \in]-\infty,-\frac{14}{3}]$.

En conclusion $\{x \mid x \text{ est solution de } (2)\} =]-\infty,-\frac{14}{3}] \cup]-4,+\infty[$.

Question 6. *Donnez la table de vérité de la formule* $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \wedge \neg Q$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Question 7. *Donnez en français correct la contraposée de l'affirmation ci-dessous.*

$$\textit{Si } \underbrace{\textit{trois est pair}}_{P} \textit{ alors } \underbrace{\textit{quatre est impair}}_{Q}.$$

La formule associée à la phrase ci-dessus est $P \Rightarrow Q$. Par définition, la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$. En français, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ se traduit par :

« Si quatre n'est pas impair, alors trois n'est pas pair. »

En utilisant le fait que *ne pas être impair* est équivalent à *être pair* ; et que *ne pas être pair* est équivalent à *être impair* ; on pouvait également proposer la phrase ci-dessous.

« Si quatre est pair , alors trois est impair. »

Question 8. *Soit* $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) *Définissez la norme de x, notée* $\|x\|$.

(b) *Supposons que* $\|x\| = 0$. *Déduisez en que* $x = 0$. *Veuillez énoncer les définitions et les résultats que vous utilisez.*

Posons $x = (x_1, x_2)$.

(a) On a $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(b) Supposons que $\|x\| = 0$. Nous devons en déduire que $x = 0$, c'est-à-dire $x = (0,0)$, ou encore $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\|x\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 && \text{par définition de la norme} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = 0 && \text{en élevant au carré les 2 membres de l'égalité précédente} \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 = 0 \text{ et } x_2^2 = 0 && \text{car } \forall a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 && \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}$$

Remarque : Nous venons en fait de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Question 9.

(a) *Soit* $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$. *Complétez les phrases suivantes*[1] *:*

$$x = y \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 = y_2}$$

$$x \neq y \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 \neq y_1 \ \vee \ x_2 \neq y_2}$$

(b) *On considère les trois vecteurs*

$$u = (-1, 3), \qquad v = (5, -2), \qquad \text{et} \qquad w = (\lambda, \mu - \lambda),$$

où λ *et* μ *sont des paramètres réels. Déterminez, si possible,* λ *et* μ *pour que* $u + v + w = 0$. *Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Voir correction du Test 2, 20 septembre 2010, Question 2.

[1] Les phrases finales doivent être vraies mais les deux membres de l'équivalence doivent être différents.