Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (30 septembre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Considérons l'ensemble des vecteurs (α, β) de $\mathbb{R}^2$ tels que (α, β) est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 2x + 3$. /3
Décrivez géométriquement cet ensemble et représentez le graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par cet ensemble.

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

On note $P(n)$ le prédicat défini ci-dessous :

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = n^2 + n - 1$$

Le prédicat $P(k+1)$ est donné par

(a) ☐ $\sum_{j=1}^{k} j^3 = k^2 + k - 1$

(b) ☐ $\sum_{k=1}^{k} k^3 = k^2 + k - 1$

(c) ☐ $\sum_{k=1}^{k+1} (k+1)^3 = (k+1)^2 + (k+1) - 1$

(d) ☐ $\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = (k+1)^2 + (k+1)$

(e) ☐ $\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = (k+1)^2 + k$

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 3. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1

On note $P(x,y)$ le prédicat $x = y^2$. On note φ la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$.

Un étudiant a écrit la liste d'arguments ci-dessous pour justifier que la formule φ est vraie.

(1) Soit x quelconque dans $\mathbb{R}$.

(2) On choisit $y = \sqrt{x}$, vu que $x \in \mathbb{R}$, on a que $y \in \mathbb{R}$.

(3) On a clairement que $P(x,y)$ est vraie.

(a) ☐ La formule φ est vraie, et la preuve proposée est correcte.

(b) ☐ La formule φ est vraie, mais la preuve comporte un problème dans la ligne (1).

(c) ☐ La formule φ est fausse, et la preuve comporte un problème dans la ligne (1).

(d) ☐ La formule φ est vraie, mais la preuve comporte un problème dans la ligne (2).

(e) ☐ La formule φ est fausse, et la preuve comporte un problème dans la ligne (2).

(f) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit la droite $D \equiv (x,y) = (3+2\lambda, 3\lambda+1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le point $\left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right)$ appartient à la droite D.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le vecteur $\left(\frac{9\pi}{7}, \frac{-6\pi}{7}\right)$ est un vecteur normal de D.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe un vecteur directeur de la droite D dont la norme vaut 1.

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Prouvez par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a /4

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. $/3$

(a) Donnez la pente de D.

(b) Donnez une équation paramétrique de D.

Question 7. Donnez une équation cartésienne de la droite D dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est perpendiculaire à la droite D' passant par les points $(2, 0)$ et $(0, -3)$. $/3$

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (30 septembre 2019)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Résolvez l'inéquation $/3$

$$x+1 \leqslant f(x) \qquad (1)$$

où $f(x) = x+2$ si $x < 3$ et $f(x) = 2x-8$ si $x \geqslant 3$. Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Algèbre I

Test n° 1 (30 septembre 2019)

Nom :

Prénom :

Section :

- Cette partie concerne uniquement les mathématiciens et les physiciens.
- Les consignes pour la partie de « Mathématique Élémentaire » restent d'application.

Question 1. Calculez /4

- $(1+\boldsymbol{i})(4-\boldsymbol{i}) =$
- l'inverse de $-\boldsymbol{i}$ dans $\mathbb{C}$:
- l'inverse de $2-\boldsymbol{i}$ dans $\mathbb{C}$:
- $|1+5\boldsymbol{i}| =$

Question 2. Prouvez que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. /2