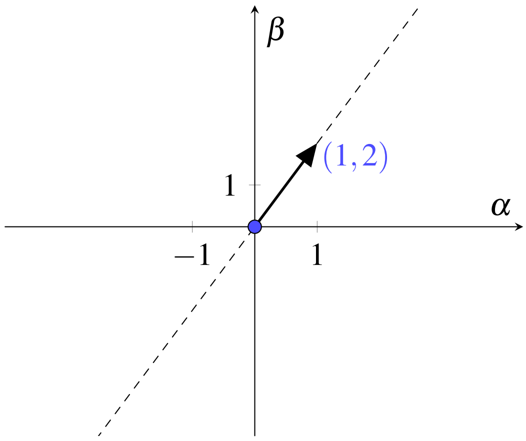
Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 3 (30 septembre 2019) **Correction**

Question 1. *Considérons l'ensemble des vecteurs (α,β) de $\mathbb{R}^2$ tels que (α,β) est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 2x+3$.*
Décrivez géométriquement cet ensemble et représentez le graphiquement. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par cet ensemble.

Une équation cartésienne de la droite donnée dans l'énoncé est $-2x+y=3$. Un vecteur normal de cette droite est $(-2,1)$. Donc un vecteur directeur de la droite est $(1,2)$ car $\big((-2,1)\,\big|\,(1,2)\big) = -2+2=0$. Tout multiple non nul de ce vecteur est encore un vecteur directeur.
L'ensemble recherché est $\big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, (\alpha,\beta)=\lambda(1,2) \text{ où } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big\}$. C'est la droite d'équation $y=2x$ privée du point $(0,0)$.



Question 2. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier).*
On note $P(n)$ le prédicat défini ci-dessous :

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = n^2+n-1$$

Le prédicat $P(k+1)$ est donné par

☐ $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^3 = k^2+k-1$

☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{k} k^3 = k^2+k-1$

☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{k+1} (k+1)^3 = (k+1)^2+(k+1)-1$

☐ $\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = (k+1)^2 + (k+1)$

☑ $\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = (k+1)^2 + k$

☐ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 3. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier).*
On note $P(x,y)$ le prédicat $x = y^2$. On note φ la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$.
Un étudiant a écrit la liste d'arguments ci-dessous pour justifier que la formule φ est vraie.

> *(1) Soit x quelconque dans $\mathbb{R}$.*
>
> *(2) On choisit $y = \sqrt{x}$, vu que $x \in \mathbb{R}$, on a que $y \in \mathbb{R}$.*
>
> *(3) On a clairement que $P(x,y)$ est vraie.*

☐ *La formule φ est vraie, et la preuve proposée est correcte.*

☐ *La formule φ est vraie, mais la preuve comporte un problème dans la ligne (1).*

☐ *La formule φ est fausse, et la preuve comporte un problème dans la ligne (1).*

☐ *La formule φ est vraie, mais la preuve comporte un problème dans la ligne (2).*

☑ *La formule φ est fausse, et la preuve comporte un problème dans la ligne (2).*

☐ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 4. *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (3+2\lambda, 3\lambda+1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Le point $\left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right)$ appartient à la droite D.*

On a que $\left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right) \in D$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right) = (3+2\lambda, 3\lambda+1)$. L'égalité entre deux vecteurs dit

$$\frac{17}{5} = 3 + 2\lambda, \tag{1}$$

$$\frac{8}{5} = 3\lambda + 1. \tag{2}$$

De (1), on a $\frac{2}{5} = 2\lambda$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{5}$. De (2), on a $\frac{3}{5} = 3\lambda$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{5}$. L'affirmation est donc vraie. Il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{5}$.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur* $\left(\frac{9\pi}{7}, \frac{-6\pi}{7}\right)$ *est un vecteur normal de D.*

On a $D \equiv (x,y) = (3,1) + \lambda(2,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Un vecteur directeur de D est donc $(2,3)$. $\left(\frac{9\pi}{7}, -\frac{6\pi}{7}\right)$ sera un vecteur normal de D si le produit scalaire des 2 vecteurs est nul. Or $\left((2,3)\,\middle|\,(\frac{9\pi}{7}, -\frac{6\pi}{7})\right) = \frac{18\pi}{7} - \frac{18\pi}{7} = 0$. C'est donc un vecteur normal de D.

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Il existe un vecteur directeur de la droite D dont la norme vaut 1.*

$(2,3)$ est vecteur directeur de D. Tout multiple non nul de ce vecteur est encore un vecteur directeur. Or on sait que si $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors $\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = 1$. Ici, $\|(2,3)\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ est un vecteur directeur de D dont la norme vaut 1.

Question 5. *Prouvez par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On doit prouver la formule $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ P(n)$, où $P(n)$ est le prédicat ci-dessous.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Cas de base

On doit prouver que $P(1)$ est vraie, on doit donc prouver l'égalité ci-dessous.

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{1+1}, \quad \text{qui est clairement vérifiée.}$$

Cas général

On doit prouver que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que $P(k)$ est vrai, on doit en déduire que $P(k+1)$ est vraie.

L'hypothèse d'induction est que $P(k)$ est vraie, où $P(k)$ est donné ci-dessous :

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

On cherche à montrer que $P(k+1)$ est vrai, où $P(k+1)$ est donné ci-dessous :

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Par hypothèse d'induction, on sait que $P(k)$ est vrai, on a donc :

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&\qquad = 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} \qquad \text{(en utilisant l'hypothèse d'induction)}\\
&\qquad = 1-\frac{(k+2)}{(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&\qquad = 1-\left(\frac{(k+2)}{(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{-1}{(k+1)\cdot(k+2)}\right)\\
&\qquad = 1-\frac{(k+2-1)}{(k+1)\cdot(k+2)}\\
&\qquad = 1-\frac{(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1-\frac{1}{(k+2)}\ .
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Question 6. *Soient $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.*

(a) Donnez la pente de D.

(b) Donnez une équation paramétrique de D.

Voir correction du Test 3, 28 septembre 2015, Question 2.

Question 7. *Donnez une équation cartésienne de la droite D dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est perpendiculaire à la droite D' passant par les points $(2,0)$ et $(0,-3)$.*

Dire que l'ordonnée à l'origine vaut -5 signifie que $(0,-5)\in D$.
La pente de D' est donnée par $\frac{-3-0}{0-2}=\frac{3}{2}$. La pente de D vaut donc $-\frac{2}{3}$ car les pentes de deux droites perpendiculaires sont inverses et opposées. Comme D n'est pas une droite verticale, une équation cartésienne de D est de la forme $y=mx+p$ où m est la pente. Donc $D\equiv y=-\frac{2}{3}x+p$.
Comme $(0,-5)\in D$, on en déduit que $p=-5$, en remplaçant x par 0 et y par -5. En conclusion, $D\equiv y=-\frac{2}{3}x-5$.

Question 8. *Résolvez l'inéquation*

$$x+1\leqslant f(x) \tag{3}$$

où $f(x)=x+2$ si $x<3$ et $f(x)=2x-8$ si $x\geqslant 3$. Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Si $x<3$, l'inéquation (3) devient $x+1\leqslant x+2$, c'est-à-dire $1\leqslant 2$. Ceci étant vrai pour toutes les valeurs de x, l'ensemble des solutions pour ce cas est $]-\infty,3[$.
Si $x\geqslant 3$, l'inéquation (3) devient $x+1\leqslant 2x-8$, c'est-à-dire $x\geqslant 9$. Comme toutes les valeurs $x\geqslant 9$ vérifient aussi $x\geqslant 3$, elles donnent toutes les solutions pour ce cas. L'ensemble des solutions pour ce cas est donc $[9,+\infty[$.
En conclusion $\{x\,|\,x \text{ vérifie } (3)\}=]-\infty,3[\cup[9,+\infty[$.