Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (7 octobre 2019)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). /1
La négation de la phrase

« *Quel que soit n un naturel, si n est pair alors* $n+1$ *est impair* »

est la phrase

(a) ☐ *Quel que soit n un naturel, si n n'est pas pair alors* $n+1$ *n'est pas impair.*

(b) ☐ *Quel que soit n un naturel, n est pair et* $n+1$ *n'est pas impair.*

(c) ☐ *Il existe un naturel n tel que si n est pair alors* $n+1$ *est impair.*

(d) ☐ *Il existe un naturel n tel que si* $n+1$ *n'est pas impair alors n n'est pas pair.*

(e) ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 2. Est-il possible de prouver par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 = n^2+1$? /2
Si oui, donnez la preuve. Si non, expliquez pourquoi. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Pour chacune des paires de droites D_1 et D_2 ci-dessous, déterminez explicitement l'ensemble $D_1 \cap D_2$. Expliquez votre démarche.

$/4$

- $D_1 \equiv (x,y) = (1,1) + \lambda(1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $D_2 \equiv (x,y) = (-1,2) + \mu(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$;

- $D_1 \equiv 2x - 3y = 7$ et $D_2 \equiv 0{,}3y = 0{,}2x - 0{,}7$.

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (7 octobre 2019)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists a \in \mathbb{R} \quad a^2 = a^2 + 1$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est un multiple de 7.
(Rappel : un nombre $a \in \mathbb{Z}$ est un multiple de 7 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7 \cdot \ell$).

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (7 octobre 2019)

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 5. On considère l'inéquation

$$f(x) \leqslant x+1 \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction. On suppose que

(a) pour $x \in \,]-\infty, -2]$, (1) est équivalent à $x \in \,]-3, -\sqrt{2}[$;

(b) lorsque $x > -2$, $f(x) = x^2 - 6$.

Écrivez l'ensemble des solutions de (1) sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est). Détaillez et justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit la droite $D \equiv 2mx + (m-3)y + 1 = 0$, où m est un paramètre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminez pour quelle(s) valeur(s) de m la droite D satisfait la condition donnée. Justifiez votre réponse. /4

- Le point $(-1,3)$ appartient à D.

- La pente de D vaut 1.

- La droite D est parallèle à l'axe des x.

- La droite D est le graphe d'une fonction.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (7 octobre 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit le système

/2

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi^2 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ ce système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Question 8. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Montrez que $(u|u) = \|u\|^2$.

/2

Algèbre I

Test n° 1 (7 octobre 2019)

Nom :

Prénom :

Section :

- Cette partie concerne uniquement les mathématiciens et les physiciens.
- Les consignes pour la partie de « Mathématique Élémentaire » restent d'application.

Question 1. Soit $a = 6/5$.

/6

(a) Dessinez dans le plan complexe l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re e\, z = a\}$.

(b) Parmi les éléments de A, placez le(s) complexe(s), s'ils existent, de module 2.

(c) Pour le(s) complexe(s) z trouvés en (b), calculez $\Im m\, z$, $z/2$ et z^{-1}. Placez le(s) z^{-1} trouvés dans le plan complexe.

Justifiez brièvement comment vous placez les points demandés dans $\mathbb{C}$.