Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (7 octobre 2019) **Correction**

Question 1. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier).*
La négation de la phrase

"Quel que soit n un naturel, si n est pair alors $n+1$ est impair"

est la phrase

- *(a)* ☐ Quel que soit n un naturel, si n n'est pas pair alors $n+1$ n'est pas impair.
- *(b)* ☐ Quel que soit n un naturel, n est pair et $n+1$ n'est pas impair.
- *(c)* ☐ Il existe un naturel n tel que si n est pair alors $n+1$ est impair.
- *(d)* ☐ Il existe un naturel n tel que si $n+1$ n'est pas impair alors n n'est pas pair.
- *(e)* ☑ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

La négation demandée est la phrase :

Il existe un naturel n tel que n est pair et $n+1$ n'est pas impair.

Question 2. *Est-il possible de prouver par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 = n^2+1$. Si oui, donnez la preuve. Sinon, expliquez pourquoi. Justifiez votre réponse.*

La réponse est non, car l'affirmation que l'on doit prouver par induction est fausse. En effet, on peut montrer que la négation de l'affirmation est vraie.
La négation de la formule $\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 = n^2+1$ est la formule $\exists n \in \mathbb{N},\ \ n+1 \neq n^2+1$.
Pour montrer que la formule $\exists n \in \mathbb{N},\ n+1 \neq n^2+1$ est vraie, on choisit $n=2$, on a clairement que $3 = 2+1 \neq 2^2+1 = 5$.
Ce qui prouve que la formule $\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 = n^2+1$ est fausse.

Question 3. *Pour chacune des paires de droites D_1 et D_2 ci-dessous, déterminez explicitement l'ensemble $D_1 \cap D_2$. Expliquez votre démarche.*

- $D_1 \equiv (x,y) = (1,1) + \lambda(1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *et* $D_2 \equiv (x,y) = (-1,2) + \mu(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$;

  Voir correction du Test 2, 24 septembre 2007, Question 9.

- $D_1 \equiv 2x - 3y = 7$ *et* $D_2 \equiv 0{,}3y = 0{,}2x - 0{,}7$.

  On a $D_2 \equiv -0{,}2x + 0{,}3y = -0{,}7$, ou encore en multipliant les 2 membres de l'équation par -10, $D_2 \equiv 2x - 3y = 7$. Par conséquent, D_1 et D_2 sont 2 droites confondues.

  On a : $x = \frac{3y+7}{2}$.

  Donc, l'ensemble qui décrit $D_1 \cap D_2$ est $\left\{ \left(\frac{3\lambda+7}{2}, \lambda \right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Question 4. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\exists a \in \mathbb{R} \quad a^2 = a^2 + 1$.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ *est un multiple de* 7.
(Rappel : un nombre $a \in \mathbb{Z}$ est un multiple de 7 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7 \cdot \ell$).

(a) Pour prouver que la formule $\exists a \in \mathbb{R} \quad a^2 = a^2 + 1$ est fausse, on prouve que sa négation est vraie.

La négation de la formule $\exists a \in \mathbb{R} \quad a^2 = a^2 + 1$ est la formule $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2 \neq a^2 + 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a que $a^2 \neq a^2 + 1$ si et seulement si $0 \neq 1$, ce qui est toujours vrai.

La formule $\exists a \in \mathbb{R} \quad a^2 = a^2 + 1$ est donc fausse.

(b) Pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est un multiple de 7 est vraie, nous allons produire une preuve par induction.

On doit prouver la formule $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$, où $P(n)$ est le prédicat ci-dessous.

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \text{ est un multiple de 7.}$$

Cas de base

On doit prouver que $P(0)$ est vraie, on doit donc prouver que $2^{0+2} + 3^{2\cdot0+1}$ est un multiple de 7. On a que $2^{0+2} + 3^{2\cdot0+1} = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$, qui est clairement un multiple de 7.

Cas général

On doit prouver que $\forall k \in \mathbb{N}\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(k)$ est vraie, on doit en déduire que $P(k+1)$ est vraie.

L'hypothèse d'induction est que $P(k)$ est vraie, où $P(k)$ est donné ci-dessous.

$$2^{k+2} + 3^{2k+1} \text{ est un multiple de 7.}$$

On cherche à montrer que $P(k+1)$ est vraie, où $P(k+1)$ est donné ci-dessous.

$$2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} \text{ est un multiple de 7.}$$

On cherche à prouver que $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ est un multiple de 7.

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} &= 2^{1+k+2} + 3^{2+2k+1} \\
&= 2^1 \cdot 2^{k+2} + 3^2 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+2} + 9 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+2} + (2+7) \cdot 3^{2k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 2 \cdot (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7 \cdot 3^{2k+1}
\end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction, on sait que $P(k)$ est vraie, on a donc qu'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7 \cdot \ell$. On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} &= 2 \cdot (7 \cdot \ell) + 7 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 7 \cdot 2 \cdot \ell + 7 \cdot 3^{2k+1} \\
&= 7 \cdot (2 \cdot \ell + 3^{2k+1})
\end{aligned}$$

Vu que $(2 \cdot \ell + 3^{2k+1}) \in \mathbb{Z}$, car $\ell,\ k \in \mathbb{N}$, on a que $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ est un multiple de 7.

Ce qu'il fallait démontrer.

Question 5. *On considère l'inéquation*

$$f(x) \leqslant x + 1 \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction. On suppose que

(a) pour $x \in]-\infty, -2]$, (1) est équivalent à $x \in]-3, -\sqrt{2}[$;

(b) lorsque $x > -2$, $f(x) = x^2 - 6$.

Écrivez l'ensemble des solutions de (1) sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est). Détaillez et justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Commençons par regarder les solutions de l'inéquation (1) pour chacun des deux cas

- Pour les $x \in]-\infty,-2]$, on sait que x satisfait l'inégalité (1) si et seulement si $x \in]-3,-\sqrt{2}[$. Cette équivalence semble dire que l'ensemble des solutions est $]-3,-\sqrt{2}[$. Cependant, il faut faire attention au fait que celle-ci n'est vraie que sous la condition que $x \in]-\infty,-2]$! L'affirmation de l'énoncé s'écrit symboliquement comme

$$x \in]-\infty,-2] \Rightarrow \Big((1) \Leftrightarrow x \in]-3,-\sqrt{2}[\Big) \tag{2}$$

et, par conséquent, si $x \notin]-\infty,-2]$, on ne peut déduire de la vérité de (2) que l'équivalence est vraie pour ces x ! Tout ce qu'on peut déduire de (2) est que parmi les $x \in]-\infty,-2]$, ceux qui sont solution de (1) vérifient $x \in]-3,-\sqrt{2}[$. L'ensemble des solutions pour ce cas est donc $]-\infty,-2] \cap]-3,-\sqrt{2}[=]-3,-2]$.

- Lorsque $x > -2$, (1) s'écrit $x^2 - 6 \leqslant x + 1$ ou encore

$$x^2 - x - 7 \leqslant 0 \tag{3}$$

Le discriminant du polynôme du second degré est $\triangle = 1 + 28 = 29$ et ses deux racines sont donc $\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$. Vu que le coefficient de x^2 est positif, le tableau de signe est

x		$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{29}}{2}$	
x^2-x-7	$+$	0	$-$	0	$+$

Les solutions de (3) sont donc les valeurs de x appartenant à $\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]$.

Comme pour le point précédent, celles-ci ne donnent les solutions de (1) que si elles vérifient $x > -2$. Or, on remarque que $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < -2$ car cette inégalité est équivalente à $1 - \sqrt{29} < -4$ ou encore $5 < \sqrt{29}$, ou encore à (puisque les deux membres sont positifs) $25 < 29$. Par conséquent, l'ensemble des solutions pour ce cas est $\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right] \cap]-2,+\infty[= \left]-2, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]$.

En rassemblant les solutions trouvées pour chacun des deux cas ci-dessus, on conclut que

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant x+1\} &=]-3,-2] \cup \left]-2, \tfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right] \\ &= \left]-3, \tfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right].\end{aligned}$$

Question 6. *Soit la droite $D \equiv 2mx + (m-3)y + 1 = 0$, où m est un paramètre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminez pour quelle(s) valeur(s) de m la droite D satisfait la condition donnée. Justifiez votre réponse.*

- *Le point $(-1,3)$ appartient à D.*

  Cela signifie que l'équation est vérifiée lorsqu'on remplace x par -1 et y par 3. Donc on a : $-2m + (m-3)3 + 1 = 0$, càd $-2m + 3m - 9 + 1 = 0$, càd $m = 8$.

  Donc $(-1,3) \in D$, lorsque $m = 8$.

- *La pente de D vaut 1.*

  Dans une équation de la forme $ax+by+c=0$, si $b \neq 0$, alors la pente est donnée par $-\frac{a}{b}$.

  La pente de D vaut donc 1 si $\frac{-2m}{m-3} = 1$. En supposant[1] $m \neq 3$, on a : $-2m = m-3$, càd $m = 1$.

- *La droite D est parallèle à l'axe des x.*

  Un équation cartésienne d'une droite parallèle à l'axe des x est de la forme $y = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Il faut donc avoir $m = 0$ pour que D soit parallèle à l'axe des x.

- *La droite D est le graphe d'une fonction.*

  D est le graphe d'une fonction si D n'est pas une droite verticale. Or une équation cartésienne d'une droite verticale est de la forme $x = \beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

  Ainsi, D ne sera pas verticale si $m-3 \neq 0$, càd $m \neq 3$.

Question 7. *Soit le système*

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi^2 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et θ est un paramètre réel. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ ce système possède une unique solution. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Voir Test 3, 29 septembre 2008, Question 6.

Question 8. *Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Montrez que $(u|u) = \|u\|^2$.*

Posons $u = (u_1, u_2, u_3)$. On a

$$\begin{aligned}
(u|u) &= \big((u_1,u_2,u_3) \mid (u_1,u_2,u_3)\big) && \text{par définition de } u \\
&= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 && \text{par définition du produit scalaire entre deux vecteurs de } \mathbb{R}^3 \\
&= \left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\right)^2 && \text{car } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (\sqrt{x})^2 = x \text{ et } u_1^2+u_2^2+u_3^3 \in \mathbb{R}^+ \\
&= \|u\|^2 && \text{par définition de la norme.}
\end{aligned}$$

[1] Si $m = 3$, la droite est verticale et n'a donc pas de pente.