Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (14 octobre 2019) **Correction**

Question 1. *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible :

(a) $$AB = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3+4+5 \\ 6+8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(b) $$BC = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(c) $$A^t - 2D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(d) $$CB = \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = (-4).$$

Question 2. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 \neq 0.$

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{Z} \quad a = b^2).$

(c) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \quad (x_1 < x_2) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R} \quad x_1 < y \wedge y < x_2).$

(a) Pour prouver que la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 \neq 0$ est fausse, on prouve que sa négation est vraie. La négation de la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 \neq 0$ est la formule $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 = 0$.

Pour prouver que la formule $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 = 0$ est vraie, on choisit $x = \sqrt{2}$, on a bien que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2}^2 - 2 = 2 - 2 = 0$.

On a donc bien que la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2 \neq 0$ est fausse.

(b) Pour prouver que la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{Z} \quad a = b^2)$ est fausse, on va prouver que sa négation est vraie. La négation de la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{Z} \quad a = b^2)$ est la formule $\exists a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \wedge (\forall b \in \mathbb{Z} \quad a \neq b^2)$.

Pour prouver que la formule la formule $\exists a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \wedge (\forall b \in \mathbb{Z} \quad a \neq b^2)$ est vraie, on choisit $a = 2$. On a bien que $2 \in \mathbb{Z}$ et $2 \geqslant 0$. Il reste à prouver que $\forall b \in \mathbb{Z} \quad 2 \neq b^2$. On sait que les seules solutions possibles à l'équation $b^2 = 2$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, aucune de ces deux solutions n'appartient à $\mathbb{Z}$, donc aucun élément de $\mathbb{Z}$ n'est solution de l'équation $b^2 = 2$, c'est-à-dire que pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a que $b^2 \neq 2$.

Ce qui prouve que la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a \geqslant 0) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{Z} \quad a = b^2)$ est fausse.

(c) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_1 < x_2$, sous cette hypothèse, on doit montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 < y$ et $y < x_2$.

On choisit $y = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Vu que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a bien que $y \in \mathbb{R}$. Il reste à prouver que $x_1 < y$ et $y < x_2$. On va montrer que $x_1 < y$, l'autre inégalité se fait avec un argument similaire.

On sait que $x_1 < x_2$, donc $2x_1 = x_1 + x_1 < x_1 + x_2$. En divisant par deux les deux membres de l'inégalité, on a donc que $x_1 < y$. Ce que l'on souhaitait démontrer.

Question 3. *Soit $a \geqslant 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Donnez une propriété équivalente à $\sqrt{a} \geqslant b$ qui ne fait plus intervenir de racine carrée. Justifiez votre réponse.*

$$\sqrt{a} \geqslant b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a \geqslant b^2 & \text{si } b \geqslant 0, \\ \text{toujours vrai} & \text{si } b < 0. \end{cases}}$$

Justifions chacune des deux implications.

($\Rightarrow$) Supposons que $\sqrt{a} \geqslant b$. Si $b < 0$, cette inégalité est clairement vraie (vu que $\sqrt{a} \geqslant 0 > b$) et donc le second cas de la thèse est correct. Si $b \geqslant 0$, les deux membres de l'inégalité sont positifs (une racine carrée est toujours $\geqslant 0$ par définition) et on peut élever au carré sans changer le sens de l'inégalité car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On obtient l'inégalité $(\sqrt{a})^2 \geqslant b^2$. Or, par définition, $(\sqrt{a})^2 = a$, ce qui conclut cette implication.

($\Leftarrow$) Si $b < 0$, on a bien la thèse $\sqrt{a} \geqslant b$ car $\sqrt{a} \geqslant 0 > b$. Si $b \geqslant 0$, on suppose que $a \geqslant b^2$. Vu que les deux membres de l'inégalité sont $\geqslant 0$, on peut en prendre la racine carrée. Comme celle-ci est croissante, on a $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b^2}$. Comme $b \geqslant 0$, on a $\sqrt{b^2} = |b| = b$. Ceci conclut l'argument.

Question 4.

(a) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissez la valeur absolue de x :*

$$|x| = \boxed{\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

(b) *Calculez $|\sqrt{3}-\sqrt{\pi}|$ en justifiant votre réponse grâce à la définition donnée au point précédent.*

La définition dit que

$$|\sqrt{3}-\sqrt{\pi}| = \begin{cases} \sqrt{3}-\sqrt{\pi} & \text{si } \sqrt{3}-\sqrt{\pi} \geqslant 0 \\ -(\sqrt{3}-\sqrt{\pi}) & \text{si } \sqrt{3}-\sqrt{\pi} < 0 \end{cases}$$

Or $\sqrt{3} < \sqrt{\pi}$ vu que $3 < \pi$ et que la racine carrée est une fonction strictement croissante. Dès lors, c'est le deuxième cas qui s'applique (vu que $\sqrt{3}-\sqrt{\pi} < 0$) et on a

$$|\sqrt{3}-\sqrt{\pi}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}-\sqrt{3}.$$

Question 5. *Soit le système*

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$$

(a) *Résolvez ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

(b) *Résolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Voir correction du Test 4, 6 octobre 2014, Question 2.

Question 6. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{5}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}.$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Voir la correction de la question 4 du test 4 du 10 octobre 2005.

Question 7.

- *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e})$ et parallèle au plan OXZ.*
- *Donnez une équation cartésienne du plan β passant par $(-1,5,2)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv (x,y,z) = (\lambda-1, 3-2\lambda, 5+6\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Voir correction du Test 2, 4 octobre 2004, Question 7.