Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (21 octobre 2019) **Correction**

Question 1. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. **Exceptionnellement**, vous ne devez pas justifier votre réponse.*

- *(a)* *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\varnothing \subseteq \varnothing$
- *(b)* *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\varnothing \in \{\varnothing\}$.
- *(c)* *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.
- *(d)* *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\{[1,2]\} \subseteq [0,3]$.
- *(e)* *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $1 \in \{1,2\} \cap \{3,1\}$.
- *(f)* *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $3 \in \{1,2\} \cup \{4,5\}$.

Question 2. *Cochez une bonne réponse (exceptionnellement sans justifier). On considère l'ensemble S défini ci-dessous.*

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid (1 \leqslant n \leqslant 10) \wedge (n \text{ est pair } \Rightarrow n+1 \text{ est un multiple de } 3)\}.$$

☐ $S = \{2,4,6,8,10\}$

☐ $S = \{2,5,8\}$

☐ $S = \{3,6,9\}$

☐ $S = \{4,7,10\}$

☐ $S = \{2,8\}$

☑ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

$S = \{1,2,3,5,7,8,9\}$. Voir correction du Test 4, 8 octobre 2018, Question 1.

Question 3. *Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1,x_2,x_3) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par*

$$D_1 \equiv 1-x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$
$$D_2 \equiv (x,y,z) = (3\lambda+1, -\lambda-2, 5+\lambda), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

On a :

$$D_1 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

et

$$D_2 \equiv (x,y,z) = (1,-2,5) + \lambda(3,-1,1) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc $(-1,-3,1)$ est un vecteur directeur de D_1 et $(3,-1,1)$ un vecteur directeur de D_2. On cherche donc les vecteurs $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\big((x_1,x_2,x_3) \mid (-1,-3,1)\big) = 0$ et $\big((x_1,x_2,x_3) \mid (3,-1,1)\big) = 0$. Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

En faisant (1)–(2), on a : $-4x_1 = 2x_2$, càd $x_1 = -\frac{x_2}{2}$. En remplaçant dans (1), on a : $\frac{x_2}{2} - 3x_2 + x_3 = 0$, càd $x_3 = \frac{5}{2}x_2$. L'ensemble recherché est donc

$$\left\{ \left(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \frac{5}{2}\alpha\right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit de la droite D dont une équation paramétrique est $(x,y,z) = \alpha\big(-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\big)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. D passe par $(0,0,0)$ et admet $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2})$ comme vecteur directeur.

Question 4. *Résolvez l'inéquation*

$$\sqrt{\frac{\big(|x|^{1/2} + |x|^{-1/2}\big)^2 - 16}{\sqrt{(x-1)^4}\,|x|^{-3}}} \geqslant 2x \tag{3}$$

L'ensemble des solutions doit être exprimé sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Indication *: La condition d'existence est*

$$x \in \big(]-\infty, -7-4\sqrt{3}] \cup [-7+4\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}] \cup [7+4\sqrt{3}, +\infty[\big) \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Cette indication ne vous dispense pas de montrer que (4) *est la bonne condition d'existence.*

Commençons par regarder les conditions d'existence.

- Les expressions $|x|^{-1/2}$ et $|x|^{-3}$ n'ont de sens que si $x \neq 0$.
- Pour que $\sqrt{(x-1)^4}$ existe, il faut que $(x-1)^4 \geqslant 0$. Vu que l'exposant est pair, c'est toujours le cas et il n'y a donc pas de contrainte à imposer à x.
- Le produit $\sqrt{(x-1)^4}\,|x|^{-3}$ ne peut être nul car il est au dénominateur. Les deux facteurs de ce produit doivent donc être non-nuls. Le premier facteur $\sqrt{(x-1)^4}$ est nul si et seulement si $x = 1$; le second $|x|^{-3}$ ne s'annule jamais.

- Pour que la racine carrée extérieure existe, il faut que la fraction $\frac{\left(|x|^{1/2}+|x|^{-1/2}\right)^2-16}{\sqrt{(x-1)^4}\,|x|^{-3}}$ soit positive.

  Or son dénominateur est toujours positif. Il faut donc que $\left(|x|^{1/2}+|x|^{-1/2}\right)^2-16 \geqslant 0$, ou encore, en développant le carré, $|x|-14+|x|^{-1} \geqslant 0$. En multipliant les deux membres par $|x|>0$ (car les conditions d'existence ci-dessus demandent que $x \neq 0$), on obtient la condition équivalente :

  $$|x|^2-14|x|+1 \geqslant 0. \tag{5}$$

  Posons $y=|x|$. On calcule aisément le tableau de signes de $y^2-14y+1$ en calculant ses racines et en remarquant que le coefficient de y^2 est positif. Ceci donne :

y		$7-4\sqrt{3}$		$7+4\sqrt{3}$	
$y^2-14y+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Se rappelant que $y=|x|$ et étant donné que[1] $0<7-4\sqrt{3}$, on en déduit que (5) est vérifié si et seulement

  - si $|x| \leqslant 7-4\sqrt{3}$, c'est-à-dire si $x \in [-7+4\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}]$
  - ou si $|x| \geqslant 7+4\sqrt{3}$, c'est-à-dire si $x \in \left]-\infty, -7-4\sqrt{3}\right] \cup \left[7+4\sqrt{3}, +\infty\right[$.

  Puisque c'est un « ou » entre les deux cas précédents, il faut en faire l'union. On trouve l'ensemble entre parenthèses de (4).

En conclusion, le dernier cas disant que x doit appartenir à l'ensemble entre parenthèses de (4) et le premier (resp. troisième) cas que $x \neq 0$ (resp. $x \neq 1$), on a bien[2] que (4) est la condition pour que les expressions de (3) aient un sens.

Passons maintenant à la résolution de (3). Distinguons deux cas.

- Si $x<0$, (3) est vérifié puisque son membre de gauche est positif.
- Si[3] $x>0$, les deux membres de (3) sont positifs et on peut donc les élever au carré sans changer le sens de l'inégalité. De plus, le dénominateur de la fraction étant strictement positif, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par celui-ci sans en changer le sens. On obtient

  $$\left(|x|^{1/2}+|x|^{-1/2}\right)^2-16 \geqslant (2x)^2\sqrt{(x-1)^4}\,|x|^{-3}. \tag{6}$$

  Comme $x \geqslant 0$, $|x|=x$. De plus, $\sqrt{(x-1)^4}=\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)^2=|x-1|^2=(x-1)^2$. Ces remarques et le développement du carré justifient que (6) est équivalent à

  $$x-14+x^{-1} \geqslant 4x^2x^{-3}(x-1)^2$$

  ou encore, après multiplication par x,

  $$x^2-14x+1 \geqslant 4(x-1)^2.$$

  En développant et en regroupant les termes, cette inégalité devient $3x^2+6x+3 \leqslant 0$ ou encore $3(x+1)^2 \leqslant 0$. Ceci n'est vrai que si $x+1=0$, c'est-à-dire $x=-1$. Cette solution est à rejeter puisque nous sommes dans le cas qui traite $x>0$.

[1] En effet, $0<7-4\sqrt{3}>0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}<7$ et, comme ses deux membres sont positifs, cette dernière inégalité est équivalente à $48=4^2\cdot 3=4^4(\sqrt{3})^3<7^2=49$, ce qui est vrai.

[2] Puisque $1 \notin \left]-\infty,-7-4\sqrt{3}\right] \cup [-7+4\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}] \cup \left[7+4\sqrt{3},+\infty\right[$, on n'a pas besoin de le retirer explicitement.

[3] On ne doit pas examiner le cas $x=0$ puisque ceci est exclu par les conditions d'existence.

Au final, toutes les valeurs strictement négatives de x qui respectent la condition d'existence (4) sont des solutions. Autrement dit,

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -7-4\sqrt{3}] \cup [-7+4\sqrt{3}, 0[.$$

Question 5. *On considère une expérience aléatoire dans laquelle on lance une fois un dé à six faces parfaitement équilibré. On note $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ l'univers de cette expérience aléatoire. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

(a) Pour montrer que l'affirmation $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ est fausse, on va montrer que sa négation est vraie.

La négation de $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ est donnée par $\exists A \subseteq \Omega \quad \exists B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cup B) \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On choisit $A = \{1\}$ et $B = \{1,2\}$. On a clairement que $A \cup B = \{1,2\} = B$.

Par définition de la probabilité d'un événement, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A \cup B).$$

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, ce qui est équivalent à montrer que $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, ce qui est clairement vérifié.

(b) Pour montrer que l'affirmation $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ est fausse, on va montrer que sa négation est vraie.

La négation de $\forall A \subseteq \Omega \quad \forall B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ est donnée par $\exists A \subseteq \Omega \quad \exists B \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

On choisit $A = \{1\}$ et $B = \{1,2\}$. On a clairement que $A \cap B = \{1\} = A$.

Par définition de la probabilité d'un événement, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap B) \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, ce qui est équivalent à montrer que $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, ce qui est clairement vérifié.