Mathématiques Élémentaires

Examen (6 janvier 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. Prouvez que la formule $A \Rightarrow B$ est équivalente à la formule $\neg B \Rightarrow \neg A$. $/2$

Question 2. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous. $/1$

« Si je conduis, alors je ne téléphone pas. »

Mathématiques Élémentaires

Examen (6 janvier 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez. /4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x^2$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad (a < b) \wedge (b < a+1)$.

Question 4. On note $P(n,a,b)$ le prédicat $n = 5a+6b$. On considère la formule $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} \quad P(n,a,b)$. Un étudiant propose la preuve ci-dessous pour justifier que cette formule est vraie. /1

Montrons que la formule est vraie par induction.

- **Cas de base** : On doit prouver que $P(0,a,b)$ est vrai. Prouver que $P(0,a,b)$ est vrai revient à prouver que $\exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} \quad 0 = 5a+6b$. Prenons $a = b = 0$. On a bien $0 = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0$.
- **Cas général** : On doit prouver que $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(k,a,b) \Rightarrow P(k+1,a,b)$.

  Soit $k \in \mathbb{N}$.

  On suppose que $P(k,a,b)$ vrai, c'est-à-dire $\exists a_1 \in \mathbb{N}\ \exists b_1 \in \mathbb{N} \quad k = 5a_1 + 6b_1$.

  On doit montrer que $P(k+1,a,b)$ est vrai, c'est-à-dire $\exists a_2 \in \mathbb{N}\ \exists b_2 \in \mathbb{N} \quad k+1 = 5a_2 + 6b_2$.

  On a : $k+1 = 5a_1 + 6b_1 + 1 = 5a_1 + 6b_1 + 6 - 5 = 5(a_1 - 1) + 6(b_1 + 1)$.

  Prenons $a_2 = a_1 - 1$ et $b_2 = b_1 + 1$. On a bien $k+1 = 5a_2 + 6b_2$.

  Donc $P(k+1,a,b)$ est vrai.

Cochez la bonne réponse, **exceptionnellement** sans justifier.

- ☐ La formule est vraie et la preuve est totalement correcte.
- ☐ La formule est vraie mais le cas de base n'est pas correct.
- ☐ La formule est vraie mais la traduction de $P(k)$ n'est pas correcte.
- ☐ La formule est vraie mais la traduction de $P(k+1)$ n'est pas correcte.
- ☐ La formule est vraie mais il y a un problème dans la preuve du cas général.
- ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit la droite D passant par les points $(-1,3)$ et $(-4,-5)$. $/5$

(a) Donnez une équation paramétrique de D. Expliquez votre démarche.

(b) Donnez un vecteur directeur de D dont la norme vaut 1.

(c) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à D et dont l'ordonnée à l'origine vaut -2.

Mathématiques Élémentaires

Examen (6 janvier 2021)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. On considère l'inéquation $\sqrt{\frac{x+4}{x+1}} \leqslant 3|x|-2$. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses. /5

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ 0 est solution de cette inéquation.

Justification :

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ 2 est solution de cette inéquation.

Justification :

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos affirmations.

(c) Exprimez les conditions d'existence sous la forme d'une union minimale d'intervalles.

(d) Écrivez sous la forme d'une union minimale d'intervalles l'ensemble A des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions d'existence et pour lesquels on peut élever au carré les deux membres de l'inéquation ci-dessus pour obtenir l'inéquation équivalente

$$\frac{x+4}{x+1} \leqslant \left(3|x|-2\right)^2.$$

(e) Parmi les $x \notin A$, quels sont ceux qui sont solutions de l'inéquation de départ ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 7. /2

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissez

$$|x| = \boxed{}\,.$$

(b) Prouvez $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\xi < -a \vee a < \xi) \Rightarrow |\xi| > a$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$. $/4$