Mathématiques Élémentaires

Examen

(25 mai 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Il est interdit d'avoir son GSM sur soi. Il doit être en mode silencieux dans votre cartable.

Question 1. La formule $A \Rightarrow B$ est-elle équivalente à la formule $\neg A \vee B$? Justifiez votre réponse. $/2$

Question 2. Donnez en français correct la contraposée de la phrase ci-dessous. $/1$

« Si je conduis, alors je ne téléphone pas. »

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Déterminez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifiez. /2

Vrai : ☐ Faux : ☐ $\exists x \in \mathbb{R} \quad x > x+1.$

Question 4. Prouvez par induction que la formule ci-dessous est vraie. /3

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Nom :
Prénom :
Section :

/1

Question 5. On note $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. On considère la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}_0 \, \forall y \in \mathbb{R}_0 \quad (x < y) \Rightarrow \left(\frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right).$$

Un étudiant propose la preuve ci-dessous pour justifier que cette formule est vraie.

Afin de prouver cette formule, il suffit de considérer deux cas.

- **Cas 1 :** $x, y > 0$: Sous cette hypothèse, on a que $x \cdot y > 0$. On a donc également que $\frac{1}{x \cdot y} > 0$. On peut donc multiplier les deux membres de l'inégalité $x < y$ par $\frac{1}{x \cdot y}$, sans en changer le sens. Après simplifications, on arrive à $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, ce que l'on voulait montrer.
- **Cas 2 :** $x, y < 0$: Pour ce second cas, il suffit de constater qu'il est toujours vrai que $x \cdot y > 0$ et de répéter l'argumentation du cas précédent.

Cochez la bonne réponse, **exceptionnellement** sans justifier.

- ☐ La formule est vraie et la preuve est totalement correcte.
- ☐ La formule est vraie, la preuve est correcte dans les grandes lignes, mais manque de rigueur et de justifications.
- ☐ La formule est vraie mais dans le premier cas, il est faux d'affirmer qu'après simplifications, on arrive à $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
- ☐ La formule est vraie mais il est faux d'affirmer que le second cas est une répétition de l'argumentation du cas précédent.
- ☐ La formule est fausse car dans le premier cas, il est faux d'affirmer qu'après simplifications, on arrive à $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
- ☐ La formule est fausse car il est faux d'affirmer que le second cas est une répétition de l'argumentation du cas précédent.
- ☐ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6.

/6

(a) Soit la droite $D_1 \equiv 3x - 5y = 4y - 2 - 7x$. Donnez une équation paramétrique de D_1.

(b) Soit la droite $D_2 \equiv (x, y) = (4\lambda - 3, 2 - \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez la pente de D_2 ainsi qu'un point appartenant à D_2.

(c) Donnez une équation cartésienne de la droite D_3 perpendiculaire à D_2 et dont l'ordonnée à l'origine vaut 5.

Mathématiques Élémentaires

Examen (25 mai 2021)

Nom : ____________
Prénom : ____________
Section : ________

Question 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < -1, \\ \sqrt{x+1} - 1 & \text{si } x \geqslant -1, \end{cases}$$

ainsi que l'inéquation

$$f(x) \leqslant \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Appelons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (1). Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $0 \in \mathscr{S}$.
Justification :

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $1 \in \mathscr{S}$.
Justification :

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il n'y a aucune solution x négative car, pour ces x, $|x| \geqslant 0 > 1/x$.
Justification :

Écrivez $\mathscr{S}$ comme une union minimale d'intervalles. Détaillez vos calculs et justifiez toutes les étapes de votre raisonnement. *Indication* : $x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8.

/2

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Complétez la définition suivante :

$\sqrt{x}$ désigne la valeur u telle que $\boxed{}$.

(b) À partir de cette définition, prouvez qu'il est nécessaire que $x \geqslant 0$ pour que $\sqrt{x}$ existe. *La qualité de votre rédaction est importante.*

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Donnez une équation paramétrique de la droite D d'intersection des plans d'équations $2x+4y+3z=-1$ et $3x-2y+3z=7$. $/4$