

Mathématiques Élémentaires

Examen

(20 août 2021)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. La formule $A \Rightarrow B$ est-elle équivalente à la formule $B \Rightarrow A$? Justifiez votre réponse.

/2

Question 2. Donnez en français correct la négation de la phrase ci-dessous.

« Si je conduis, alors je ne téléphone pas. »

/1

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Soit la droite D d'équation $-3x + 2y = x - y + 5$.

/5

- (a) Donnez la pente de D . Expliquez votre démarche.
- (b) Donnez une équation paramétrique de D . Expliquez votre démarche.
- (c) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à D et passant par le point $(0, 0)$. Expliquez votre démarche.

Mathématiques Élémentaires

Examen

(20 août 2021)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Déterminez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifiez.

Vrai : Faux : $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \neq 0$.

/3

Question 5. Prouvez par induction que la formule ci-dessous est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. On considère la formule

$$\exists x \in \mathbb{R}_0 \forall y \in \mathbb{R}_0 \quad x \cdot y = 1.$$

Un étudiant propose la preuve ci-dessous pour justifier que cette formule est vraie.

Vu que la variable x est quantifiée de façon existentielle, on peut choisir sa valeur. Par contre la preuve doit fonctionner pour toutes les valeurs de la variable y , vu qu'elle est quantifiée universellement.

On prend donc $y \in \mathbb{R}_0$ quelconque. Et on choisit $x = \frac{1}{y}$. Il est important de noter que vu que y est non-nul, l'inverse de y existe, et donc $x = \frac{1}{y}$ est bien un élément de \mathbb{R}_0 . Il reste à s'assurer que $x \cdot y = 1$, pour cela, il suffit de vérifier que $\frac{1}{y} \cdot y = 1$, ce qui est clairement vérifié.

Cochez la bonne réponse, **exceptionnellement** sans justifier.

- (a) La formule est vraie et la preuve est totalement correcte.
- (b) La formule est vraie, la preuve est correcte dans les grandes lignes, mais manque de rigueur et de justifications.
- (c) La formule est vraie mais on n'a pas le droit de choisir $x = \frac{1}{y}$.
- (d) La formule est vraie mais il est faux d'affirmer que le fait que y est non-nul implique que $\frac{1}{y}$ est un élément de \mathbb{R}_0 .
- (e) La formule est vraie, mais il est faux d'affirmer que $\frac{1}{y} \cdot y = 1$.
- (f) Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

/ 1

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. On considère l'inéquation

$$\sqrt{|x-1|-1} > x+2 \quad (1)$$

et on note \mathcal{S} l'ensemble de ses solutions. Écrivez \mathcal{S} comme une union minimale d'intervalles. Détaillez vos calculs et justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8.

/2

(a) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Complétez la définition suivante :

$\sqrt{\xi}$ désigne la valeur $\eta \in \mathbb{R}$ telle que

(b) À partir de cette définition, prouvez que $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *La qualité de votre rédaction est importante.*

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9.

/4

- (a) Donnez une équation paramétrique de la droite D d'intersection des plans d'équations $3x - 2y + 4z = 1$ et $-3x + 7y - z = 0$.
- (b) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(0, -2, 1)$ et perpendiculaire à la droite D trouvée au point précédent.