Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (28 septembre 2020)

Correction

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* ! Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).

Question 1. *Donnez la table de vérité de la formule* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Question 2. *On considère la formule* φ *ci-dessous.*

« Si je suis pauvre alors je suis heureux. »

Cochez ***toutes*** *les affirmations correctes parmi celles ci-dessous.*

(a) ☐ *La négation de* φ *est* « Si je suis pauvre, alors je ne suis pas heureux ».

(b) ☑ *La négation de* φ *est* « Je suis pauvre et je ne suis pas heureux ».

(c) ☐ *La réciproque de la formule* φ *est* « Si je ne suis pas heureux, alors je ne suis pas pauvre ».

(d) ☐ *La réciproque de* φ *est* « Si je suis heureux, alors je ne suis pas pauvre ».

(e) ☑ *La contraposée de la formule* φ *est* « Si je ne suis pas heureux, alors je ne suis pas pauvre ».

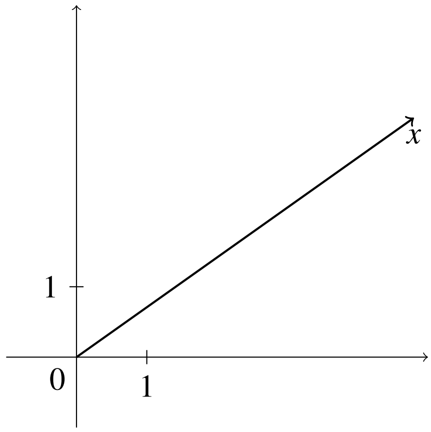
(f) ☑ *La formule* φ *est équivalente à la formule* « Je ne suis pas pauvre ou je suis heureux ».

Question 3. *Soient $u = (4, -3)$ et $v = (-2, -1)$. Calculez*

- $\dfrac{v}{2} - 3u =$
- $\left\| \dfrac{u}{\|v\|} \right\| =$
- $(u|v) =$
- *la distance entre u et v.*

Voir correction du test 2, 23 septembre 2013, question 2.

Question 4. *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.*



Voir correction du test 2, 25 septembre 2017, question 5, point (c).

Question 5. *Sans remettre sous une fraction unique (i.e., en distinguant des cas), résolvez l'inéquation*

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-3} \leqslant x - 6. \tag{1}$$

Condition d'existence : Pour que la fraction ait un sens, il faut que $x - 3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$. Nous ne nous occupons donc ci-dessous que des $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Distinguons 2 cas.

(a) Si $x - 3 > 0$, c'est-à-dire si $x > 3$, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par $x - 3$ pour obtenir une inégalité équivalente

$$(x-1)(x+1) \leqslant (x-6)(x-3),$$

ou encore en développant les deux produits,

$$x^2 - 1 \leqslant x^2 - 9x + 18.$$

En simplifiant les x^2 (ce qui consiste à retirer x^2 aux deux membres) puis en faisant passer les x à gauche et les constantes à droite, on obtient

$$9x \leqslant 19$$

c'est-à-dire $x \leqslant \frac{19}{9}$. Comme on ne considère pour ce cas que les $x > 3$ et que $\frac{19}{9} < 3$, il n'y a pas de solution pour ce cas.

(b) Si $x-3 < 0$, c'est-à-dire si $x < 3$, la multiplication des deux membres de (1) par $x-3$ donne une inégalité équivalente pour autant qu'on renverse le sens de celle-ci :

$$(x-1)(x+1) \geqslant (x-6)(x-3).$$

Par des calculs similaires à ceux du premier cas, on obtient que c'est équivalent à

$$x \geqslant \frac{19}{9}.$$

Comme pour ce cas, on ne considère que les $x < 3$, les solutions de (1) qu'on trouve ici sont les $x \in [\frac{19}{9}, 3[$.

En conclusion, si on réunit les solutions de (1) trouvées dans chacun des deux cas ci-dessus, on a

$$(1) \Leftrightarrow x \in \varnothing \cup \left[\frac{19}{9}, 3\right[= \left[\frac{19}{9}, 3\right[.$$

Question 6. *Sous quelle condition sur $z \in \mathbb{R}$ a-t-on que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xz \leqslant yz \Rightarrow x \geqslant y$? Justifiez votre réponse.*

Une condition sur z pour laquelle on a la propriété demandée est

$$z < 0 \tag{2}$$

En effet, si on prend des x, y arbitraires dont on suppose qu'ils vérifient $xz \leqslant yz$, on peut multiplier les deux membres par $\frac{1}{z}$ et, comme $\frac{1}{z} < 0$, l'inégalité change de sens[1] : $xz\frac{1}{z} \geqslant yz\frac{1}{z}$. On a donc $x \geqslant y$.

Remarque : Si on veut prouver que la condition donnée ci-dessus est optimale (ce qui n'était pas demandé), il faut établir que lorsque $z \geqslant 0$, alors l'implication $xz \geqslant yz \Rightarrow x \geqslant y$ est fausse pour certains x, $y \in \mathbb{R}$.

Soit $z \geqslant 0$ arbitraire (on ne peut pas fixer z puisque nous voulons montrer que pour *toutes* les valeurs de z qui ne vérifient pas (2), la propriété de l'énoncé n'est pas vraie). Choisissons $x = 1$ et $y = 2$. On a bien $xz = z \leqslant yz = 2z$, par contre on n'a pas $x \geqslant y$. Comme la prémisse de l'implication est vraie mais pas sa conclusion, l'implication

$$xz \leqslant yz \Rightarrow x \geqslant y$$

est fausse.

[1] On a vu au cours que quels que soient a, b, $c \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \geqslant bc$. Ici, on emploie cette règle avec $a = xy$, $b = yz$ et $c = 1/z$.

Question 7.

(a) *Soit la droite* $D \equiv (x,y) = (3,-4) + \lambda(-2,7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Recherchez deux points de* D. *Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Soit la droite* $D' \equiv 5x - 3y = 1 + 4x - 7y$. *Donnez une équation paramétrique de* D'. *Expliquez votre raisonnement.*

Voir correction du test 2 , 22 septembre 2008, question 7, points (b) et (c).