Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (5 octobre 2020) **Correction**

Question 1. *Prouvez que les deux formules ci-dessous sont vraies.*

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \left(\frac{1}{3} < x\right) \wedge \left(x < \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad (b)\ \forall y \in \mathbb{R}\ (y = 1) \Rightarrow (y^2 = 1).$$

(a) Prenons $x = 5/12$, on a

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} < \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad \frac{5}{12} < \frac{1}{2} = \frac{6}{12}.$$

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$, on distingue deux cas :

(i) $y = 1$. Dans ce cas, $y^2 = 1$ et donc l'implication est vraie.

(ii) $y \neq 1$. Dans ce cas, la premisse est fausse donc l'implication est vraie.

Ainsi, l'implication est vraie dans tous les cas.

Question 2. *Résolvez l'inéquation* $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-3} \leqslant 2x+1$ *sans la réduire à une fraction unique.*

Commençons par les conditions d'existence. Pour que la fraction existe, il faut que son dénominateur soit non nul : $x - 3 \neq 0$. Autrement dit $x \neq 3$ et nous ne travaillons donc qu'avec les $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ci-dessous.

Distinguons deux cas.

(a) Si $x - 3 > 0$, c'est-à-dire si $x > 3$, l'inéquation initiale est équivalente à

$$(x-1)(x+2) \leqslant (2x+1)(x-3)$$

car nous pouvons multiplier ses deux membres par $x - 3$ sans changer le sens de l'inégalité. Après développement des deux produits et mise des termes dans le membre de droite, cette inéquation devient

$$0 \leqslant x^2 - 6x - 1.$$

Le discriminant du polynôme du second degré étant $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) = 40$, les deux racines sont $3 \pm \sqrt{10}$. Comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines. On a donc le tableau de signe suivant

x		$3-\sqrt{10}$		$3+\sqrt{10}$	
x^2-6x-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Le polynôme est donc positif lorsque $x \in \left]-\infty,\ 3-\sqrt{10}\right] \cup \left[3+\sqrt{10},\ +\infty\right[$. Pour ce cas, comme on est sous la contrainte $x > 3$, les solutions qu'il donne sont les $x \in \left[3+\sqrt{10},\ +\infty\right[$.

(b) Si $x-3<0$ (on n'a pas à examiner $x=3$ car il est exclu par les conditions d'existence), la multiplication par $x-3$ renverse l'inégalité.

En simplifiant l'inéquation comme au premier point, on trouve qu'elle est équivalente à

$$0 \geqslant x^2-6x-1.$$

Le tableau de signe étant le même, ce polynôme est négatif pour $x \in [3-\sqrt{10},\ 3+\sqrt{10}]$. Vu la contrainte de ce cas, les solutions de l'inéquation de départ qu'on trouve ici sont $x \in [3-\sqrt{10}, 3[$.

En conclusion, pour avoir toutes les solutions de l'inéquation de l'énoncé, on doit collecter celles trouvées dans chacun des cas :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} \leqslant 2x+1\right\} = [3-\sqrt{10},\ 3[\cup[3+\sqrt{10},\ +\infty[.$$

Question 3. *Résolvez l'inéquation $|x+1| \geqslant 1$.*

Distinguons deux cas.

(a) Si $x+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant -1$, on a $|x+1| = x+1$ et l'inéquation devient $x+1 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$. Les solutions données par ce cas sont donc $x \in [-1,+\infty[\cap[0,+\infty[= [0,+\infty[$.

(b) Si $x+1<0$, c'est-à-dire si $x<-1$, on a $|x+1| = -(x+1)$ et l'inéquation devient $-(x+1) \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \leqslant -2$. Les solutions de ce cas sont $x \in]-\infty,-1[\cap]-\infty,-2] =]-\infty,-2]$.

Au final, x est solution de $|x+1| \geqslant 1$ si et seulement si $x \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.

Question 4. *On considère la phrase ci-dessous.*

Quel que soit le nombre réel x, si x est strictement positif, alors $x+1$ est strictement négatif.

(a) *Traduisez cette phrase en une formule φ de la logique du premier ordre.*

$\forall x \in \mathbb{R}, x>0 \Rightarrow x+1<0.$

(b) *Donnez, sous forme d'une formule de la logique du premier ordre, la négation de la formule φ.*

$\exists x \in \mathbb{R}, x>0 \ \wedge\ x+1 \geqslant 0.$

(c) *Donnez, en français correct, la négation de la formule φ.*

Il existe un nombre réel x tel que x est strictement positif et $x+1$ est positif ou nul.

(d) *Déterminez si la formule φ est vraie ou fausse, justifiez votre réponse.*

φ est fausse. Montrons que la négation de φ est vraie. On choisit $x=2$, on doit prouver que $x>0 \ \wedge\ x+1 \geqslant 0$. En effet, $2>0$ et $3 \geqslant 0$. Donc la négation de φ est vraie. Ainsi, comme la négation de φ est vraie, φ est fausse.

Question 5. *Considérons la droite D_1 passant par les points $(0,2)$ et $(4,0)$ ainsi que la droite D_2 passant par $(2,3)$ et perpendiculaire à D_1. Recherchez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Voir correction du test 4, 8 octobre 2018, question 5.

Question 6. *Soient $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

(a) *Donnez la pente de D. Expliquez votre démarche.*

(b) *Donnez une équation paramétrique de D. Expliquez votre démarche.*

Voir correction du test 3, 28 septembre 2015, question 2, points (a) et (b).