Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (19 octobre 2020) **Correction**

Question 1. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.* ***Exceptionnellement****, vous ne devez pas justifier votre réponse.*

(a)	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$2 \in \mathbb{N}$.	*(f)*	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.
(b)	*Vrai :* ☐	*Faux :* ☑	$\{2\} \in \mathbb{N}$.	*(g)*	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$.
(c)	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$\{2\} \subseteq \mathbb{N}$.	*(h)*	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
(d)	*Vrai :* ☐	*Faux :* ☑	$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$.	*(i)*	*Vrai :* ☐	*Faux :* ☑	$\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{Z}\}$.
(e)	*Vrai :* ☐	*Faux :* ☑	$\{\sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{N}$.	*(j)*	*Vrai :* ☑	*Faux :* ☐	$\varnothing \subseteq \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$.

Question 2. *Donnez en extension l'ensemble ci-dessous. Justifiez votre démarche.*

$$S = \big\{ n \in \mathbb{N} \,\big|\, (1 \leqslant n \leqslant 10) \wedge (n \text{ est pair } \Leftrightarrow\ n+1 \text{ est un multiple de } 3) \big\}.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	n est pair
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	$n+1$ est multiple de 3
↑	↑	↑				↑	↑	↑		

$\mathscr{S} = \{1,2,3,7,8,9\}$.

Question 3. *Soient les droites $D_1 \equiv \lambda x + 2y = 4$ et $D_2 \equiv \lambda x + (\lambda+1)y = \lambda + 3$ où λ est un paramètre réel. Donnez l'ensemble $D_1 \cap D_2$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Voir correction du test 4, 6 octobre 2014, question 8.

Question 4. *Prouvez à l'aide d'une* ***preuve directe*** *l'affirmation suivante. Veillez à soigner la présentation et la structure de la preuve.*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad 4n+3 \text{ est impair}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On doit montrer que $4n+3$ est impaire. On doit donc montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4n+3 = 2k+1$.

$$4n+3 = 2(2n) + 2 + 1 = 2(2n+1) + 1$$

On choisit $k = 2n+1 \in \mathbb{Z}$ (car $n \in \mathbb{Z}$). $4n+3 = 2k+1$.

Question 5. *Prouvez à l'aide d'une preuve par* ***contraposée*** *l'affirmation suivante. Veillez à soigner la présentation et la structure de la preuve.*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad 5n+4 \text{ est pair } \Rightarrow \ n \text{ est pair}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$
Posons $P(n) \equiv 5n+4$ est pair et $Q(n) \equiv n$ est pair. Plutôt que de prouver $P(n) \Rightarrow Q(n)$, on va montrer que $\neg Q(n) \Rightarrow \neg P(n)$.

$$\neg Q(n) \equiv n \text{ est impair} \qquad \text{et} \qquad \neg P(n) \equiv 5n+4 \text{ est impair.}$$

On suppose $\neg Q(n)$, c'est-à-dire $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$, $n = 2k_1+1$.
On doit montrer $\neg P(n)$, c'est-à-dire $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$, $5n+4 = 2k_2+1$.
Vu que $n = 2k_1+1$, on a que

$$\begin{aligned} 5n+4 &= 5(2k_1+1+4 \\ &= 10k_1+5+4 = 10k_1+9 = 2\cdot 5k_1 + 2\cdot 4 + 1 \\ &= 2(5k_1+4)+1. \end{aligned}$$

On choisit $k_2 = 5k_1+4 \in \mathbb{Z}$ (car $k_1 \in \mathbb{Z}$), $5n+4 = 2k_2+1$.

Question 6. *Résolvez l'inéquation* $\dfrac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}} \leqslant 1$.

CONDITIONS D'EXISTENCE : Pour que la racine carrée ait un sens, il faut que $x^2+4x \geqslant 0$, et pour que la fraction en ait un, $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5} \neq 0$. Pour x^2+4x, on voit facilement que ses deux racines sont 0 et -4 et on obtient le tableau de signe suivant (en notant que le coefficient de x^2 est positif) :

x		-4		0	
x^2+4x	$+$	0	$-$	0	$+$

La condition d'existence $x^2+4x \geqslant 0$ est donc équivalente à $x \in \,]-\infty,-4] \cup [0,+\infty[$. Pour la seconde condition d'existence, nous allons tout de suite chercher le signe de $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$ en fonction de x. Résolvons $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5} \geqq 0$. C'est équivalent à $\sqrt{x^2+4x} \geqq \sqrt{5}$. Comme les deux membres sont positifs, on peut élever au carré et obtenir l'inéquation équivalente $x^2+4x \geqq 5$, c'est-à-dire $x^2+4x-5 \geqq 0$. Les racines de ce polynôme du second degré étant -5 et 1 et le signe du coefficient de x^2 étant positif, on obtient le tableau de signe suivant.

x		-5		1	
x^2+4x-5	$+$	0	$-$	0	$+$

Vu qu'on a travaillé par équivalence, $x^2+4x-5 > 0$ (resp. $=0$) si et seulement si $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5} > 0$ (resp. $=0$). Par négation, cette équivalence vaut aussi pour le cas « < 0 ». On obtient donc le tableau de signe

x		-5		1	
$\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Au final les conditions d'existence sont donc, $x \in \big(]-\infty,-4[\setminus\{-5\}\big) \cup \big([0,+\infty[\setminus\{1\}\big)$.

RÉSOLUTION : Nous allons distinguer deux cas.

(a) Le dénominateur est positif i.e., $x \in\,]-\infty,-5[\,\cup\,]1,+\infty[$. Dans ce cas, l'inéquation de départ est équivalente à
$$x-\sqrt{5} \leqslant \sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$$
ou encore $x \leqslant \sqrt{x^2+4x}$. Distinguons deux sous-cas.

  (i) Si $x<0$, i.e. si $x \in\,]-\infty,-5[$, l'inéquation est automatiquement satisfaite. Toutes les valeurs $x \in\,]-\infty,-5[$ sont donc solutions.

  (ii) Si $x>0$, i.e. si $x \in\,]1,+\infty[$, les deux membres sont positifs et on peut élever au carré sans changer le sens de l'inégalité :
$$x^2 \leqslant x^2+4x.$$
Cette inéquation est équivalente à $x \geqslant 0$ et donc toujours satisfaite pour $x \in\,]1,+\infty[$.

(b) Le dénominateur est négatif i.e. $x \in\,]-5,-4] \cup [0,1[$. Dans ce cas, la multiplication des deux membres par ce dénominateur donne une inéquation équivalente si on renverse le sens de l'inéquation de départ :
$$x-\sqrt{5} \geqslant \sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}$$
ou encore $x \geqslant \sqrt{x^2+4x}$. De nouveau, distinguons deux sous-cas.

  (i) Si $x<0$ i.e. si $x \in\,]-5,-4]$, alors l'inégalité n'est satisfaite pour aucun x car une valeur strictement négative ne peut être plus grande qu'une valeur positive.

  (ii) Si $x \geqslant 0$ i.e. si $x \in [0,1[$, les deux membres sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en les élevant au carré :
$$x^2 \geqslant x^2+4x$$
c'est-à-dire $x \leqslant 0$. Comme nous ne traitons que les $x \in [0,1[$, la seule solution pour ce cas est $x=0$.

En conclusion, $x \in \mathbb{R}$ satisfait l'inéquation $\dfrac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{5}} \leqslant 1$ si et seulement si[1]
$$x \in\,]-\infty,-5[\,\cup\{0\}\cup\,]1,+\infty[.$$

[1] Ceci représente bien l'ensemble des solutions comme une union disjointe d'intervalles car $\{0\}=[0,0]$.