Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 1 (29 septembre 2021) **Correction**

Question 1. *Soient les vecteurs $u = (-1,-3,2)$ et $v = (0,1,4)$. Calculez*

- $$\begin{aligned}(u|v) &= (-1)\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 4 \quad \text{(définition du produit scalaire)}\\ &= 0-3+8\\ &= 5.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\|2u-v\| &= \|(-2,-6,4)-(0,1,4)\| && \text{(déf. mult. par un scalaire)}\\ &= \|(-2-0,\ -6-1,\ 4-4)\| && \text{(déf. soustraction de vecteurs)}\\ &= \|(-2,-7,0)\|\\ &= \sqrt{(-2)^2+(-7)^2+0^2} && \text{(déf. norme d'un vecteur)}\\ &= \sqrt{4+49} = \sqrt{53}\end{aligned}$$

- *la distance entre u et v.*

  Par définition, la distance entre deux vecteurs u et v est la norme de leur différence. Cette distance est donc :

  $$\begin{aligned}\|u-v\| &= \|(-1,-4,-2)\| && \text{(déf. différence de vecteurs)}\\ &= \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+(-2)^2} && \text{(déf. norme d'un vecteur)}\\ &= \sqrt{21}.\end{aligned}$$

Question 2. *On rappelle les propriétés suivantes (que vous ne devez pas montrer) de l'ordre sur $\mathbb{R}$:*

(a) *pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$;*

(b) *pour tout $x,y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \Leftrightarrow y-x \geqslant 0$;*

(c) *pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, $x > 0 \Leftrightarrow 1/x > 0$.*

En utilisant uniquement ces propriétés de l'ordre, montrez que

(d) *pour tout $u,v,w \in \mathbb{R}$, si $w > 0$ alors $wu \leqslant wv \Rightarrow u \leqslant v$.*

Soient $u,v,w \in \mathbb{R}$. On suppose que $w > 0$ et on veut montrer que $wu \leqslant wv \Rightarrow u \leqslant v$. On suppose donc de plus que $wu \leqslant wv$ et on cherche à déduire des éléments précédents que $u \leqslant v$.

Grâce à la propriété (b) particularisée à $x = wu$ et $y = wv$, on obtient que l'hypothèse $wu \leqslant wv$ est équivalente à

$$wv - wu \geqslant 0.$$

Par ailleurs, comme $w > 0$, la propriété (c) avec $x = w$ implique que $1/w > 0$. Dès lors, la propriété (a) particularisée à $x = 1/w$ ($\geqslant 0$) et $y = wv - wu$ ($\geqslant 0$) permet de conclure que

$$\frac{1}{w}(wv - wu) \geqslant 0,$$

c'est-à-dire, après distribution de $1/w$ et simplification,

$$v - u \geqslant 0.$$

En réutilisant la propriété (b) avec $y = v$ et $x = u$, on conclut que

$$v \geqslant u,$$

ce qui est l'inégalité désirée.

REMARQUE : cette question était un exercice à préparer.

Question 3. *Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.*

(a) Complétez les phrases suivantes :

$$v = 0 \quad \textit{ssi} \quad \boxed{v_1 = 0 \text{ et } v_2 = 0}$$

$$v \neq 0 \quad \textit{ssi} \quad \boxed{v_1 \neq 0 \text{ ou } v_2 \neq 0}$$

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ le vecteur défini par $u = (\lambda^3 - \lambda^2, \lambda^2 + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $u = 0$? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Par le point (a), $u = 0$ si et seulement si $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ <u>et</u> $\lambda^2 + \lambda = 0$. Or, on a $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ si et seulement si $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (car $ab = 0$ ssi $a = 0$ ou $b = 0$).

On a également $\lambda^2 + \lambda = 0$ si et seulement si $\lambda(\lambda + 1) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Donc, $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ et $\lambda^2 + \lambda = 0$ sont vérifiés simultanément lorsque $\lambda = 0$.

En conclusion, $u = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$.

Question 4. *Donnez la table de vérité de la formule $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$.*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1