Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 2 (4 octobre 2021) **Correction**

Question 1. *Calculez les valeurs des sommes suivantes. Donnez les détails de vos calculs.*

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} 3 = 3+3+3+3 = 12$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (2k+1) = 1+3+5+7 = 16$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2} (-1)^n = -1+1 = 0$

Question 2. *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (-4,3) + \lambda(-2,7)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(i) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ *Le point $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ appartient à la droite D.*
Voir la correction du test 3, question 3, à la date du 2 octobre 2017.

(ii) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ *Le vecteur $\left(\frac{2\pi}{7}, -\pi\right)$ est un vecteur directeur de D.*
Voir la correction du test 3, question 3, à la date du 2 octobre 2017.

(b) Représentez graphiquement la droite D dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.

Voir la correction du test 3, question 3, à la date du 2 octobre 2017.

Question 3. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\frac{x(2x+1)}{x-4} \leqslant x \tag{1}$$

sans la remettre sous la forme d'une unique fraction (donc en discutant par cas). Veillez à justifier vos calculs.

La première transformation qu'on a envie de faire par (1) est de simplifier le facteur x. L'opération correspondante est de multiplier les deux membres de l'ingalité par $\frac{1}{x}$. Or on a vu que cette opération peut « renverser » l'inégalité si $1/x < 0$. Distinguons donc deux cas.

- Si $\frac{1}{x} > 0$, c'est-à-dire si $x > 0$, on peut multiplier les deux membres de (1) par $1/x$ sans en changer le sens :
$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-4} = \frac{1}{x}\frac{x(2x+1)}{x-4} \leqslant x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$
Pour poursuivre, on veut faire passer le dénominateur $x-4$ à droite. Ceci revient à multiplier les deux membres de l'inéquation par $x-4$, ce qui nécessite de connaitre le signe de ce dernier. Distinguons dans deux sous cas :
    - Si $x-4 > 0$, c'est-à-dire si $x > 4$, alors (1) est équivalent à
    $$2x+1 \leqslant x-4.$$
    En mettant tous les x à gauche et les constantes à droite,[1] on obtient $x \leqslant -5$. Parmi ces valeurs de x, celles qui sont solutions de (1) sont celle qui vérifient la condition du cas, à savoir $x > 4$. Il n'y a donc aucune solution pour ce cas (vu qu'aucune valeur de x ne peut vérifier à la fois $x > 4$ et $x \leqslant -5$).
    - Si $x-4 < 0$ (on ne doit pas examiner le cas $x-4 = 0$ puisque l'inéquation n'a pas de sens quand le dénominateur est nul), c'est-à-dire si $x \in \,]0,4[$ (en se rappelant qu'on travaille avec $x > 0$), la multiplication des deux membres par $x-4$ renverse le sens de l'inégalité. L'inéquation (1) est alors équivalente à
    $$2x+1 \geqslant x-4$$
    ou encore $x \geqslant -5$. Vu la contrainte $x \in \,]0,4[$, les solutions pour ce cas sont $x \in \,]0,4[$.
- Si $\frac{1}{x} < 0$, c'est-à-dire si $x < 0$, multiplier les deux membres de (1) par $1/x$ donne l'inéquation équivalente
$$\frac{2x+1}{x-4} \geqslant 1.$$
En constatant que, dans ce cas ci, $x-4 < 0$ (vu que $x < 0$), cette inéquation est équivalente à
$$2x+1 \leqslant x-4$$
ou encore $x \leqslant -5$. Toutes ces solutions vérifient la condition du cas dans lequel on travaille (à savoir $x < 0$) et donc les solutions pour ce cas sont
$$x \in \,]-\infty,-5].$$
- Finalement, il reste à examiner le cas $x = 0$. Dans ce cas, on ne peut pas simplifier par x (puisqu'on ne peut pas diviser par 0). Une autre stratégie est donc nécessaire. Ici, il suffit de remplacer (substituer) x par 0 dans (1) pour voir si 0 est ou non solution. Après substitution, (1) devient
$$0 \leqslant 0.$$
Cette inégalité étant vérifiée, les solutions pour ce cas sont $x \in \{0\}$.

Pour avoir toutes les solutions de (1), il faut faire l'union des solutions obtenues dans chacun des cas. On a donc
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est solution de (1)}\} = \varnothing \cup \,]0,4[\, \cup \,]-\infty,-5] \cup \{0\} = \,]-\infty,-5] \cup [0,4[.$$

[1] Formellement ceci utilise la compatibilité de l'ordre avec l'addition.

Question 4. *Montrez que la formule $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la formule $P \wedge \neg Q$. Justifiez toutes les étapes de votre démarche.*

Afin de montrer que la formule $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la formule $P \wedge \neg Q$, nous devons établir que la formule $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ est une tautologie. Pour ce faire, nous allons construire la table de vérité de $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

On remarque que la colonne de la formule $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ ne contient que des 1. Il s'agit donc d'une tautologie. Ce qui nous permet de conclure que la formule $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la formule $P \wedge \neg Q$.

Question 5. *Donnez, en français correct, la négation de la phrase ci-dessous.*

Si Arthur retire Excalibur du rocher, alors il devient roi de Bretagne.

On note P la proposition *Arthur retire Excalibur du rocher* et Q la proposition *il devient roi de Bretagne*. La phrase se traduit alors par la formule $P \Rightarrow Q$. Par l'exercice précédent, nous savons que $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la formule $P \wedge \neg Q$. La négation de la phrase est donc

*Arthur retire Excalibur du rocher **et** il **ne** devient **pas** roi de Bretagne.*