# Mathématiques Élémentaires

## Test n° 3 (11 octobre 2021) **Correction**

Question 1. *Écrivez l'ensemble A ci-dessous sous la forme d'une union d'intervalles :*

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 + x \leqslant 0\}.$$

Par définition, l'ensemble $A$ contient toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient la proposition

$$x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 + x \leqslant 0.$$

Celle-ci peut se réecrire de manière équivalente comme

$$x > 2 \ \vee\ x^2 + x \leqslant 0 \tag{1}$$

car $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \vee Q$. En utilisant le résultat sur le signe d'une expression du second degré, on déduit le tableau suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dès lors $x^2 + x \leqslant 0$ est équivalent à $x \in [-1,0]$ et (1) se réecrit

$$x \in \,]2,+\infty[\ \vee\ x \in [-1,0].$$

Par conséquent, $A = [-1,0] \cup \,]2,+\infty[$ (c'est une union à cause du « $\vee$ »).

Question 2. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{|x^2+x|}{x^2-2} \leqslant 1.$$

La première chose à regarder sont les conditions d'existence. Ici, la seule opération qui n'est pas toujours définie est la division qui nécessite que le dénominateur soit non-nul. Autrement dit, on a besoin que $x^2 - 2 \neq 0$, c'est-à-dire

$$x \neq -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x \neq \sqrt{2}.$$

L'ensemble dans lequel on cherche les solutions est donc $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
Pour multiplier les deux membres de l'inéquation par $x^2 - 2$, nous avons besoin du signe de celui-ci. Comme le coefficient de $x^2$ (à savoir 1) est positif, ce polynôme du second degré est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur. Ceci est résumé par le tableau

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Distinguons deux cas.

- Si $x^2 - 2 > 0$, c'est-à-dire si $x \in \,]-\infty, -\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2}, +\infty[$, on peut multiplier les deux membres de l'inéquation sans en changer le sens, ce qui donne l'inéquation équivalente

$$|x^2 + x| \leqslant x^2 - 2.$$

Pour enlever les valeurs absolues, il faut maintenant discuter du signe de $x^2 + x$. Via la procédure vue en cours (quelle est-elle ?), on trouve facilement le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x$ | | $+$ | | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Vu le cas qu'on est en train de traiter, on a que $x^2 + x > 0$ et donc l'inéquation devient

$$x^2 + x \leqslant x^2 - 2$$

ou encore $x \leqslant -2$. Comme $-2 \leqslant -\sqrt{2}$, toutes ces solutions sont acceptables et les solutions de l'inéquation de départ trouvées dans ce cas sont

$$x \in \,]-\infty, -2].$$

- Si $x^2 - 2 < 0$, c'est-à-dire si $x \in \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, l'inéquation devient

$$|x^2 + x| \geqslant x^2 - 2.$$

On pourrait diviser en deux cas pour enlever la valeur absolue mais, ici, il y a plus simple. En effet, une valeur absolue est toujours positive. Comme on traite le cas où $x^2 - 2 < 0$, on a

$$|x^2 + x| \geqslant 0 > x^2 - 2$$

pour toutes les valeurs de $x$ traitées. Tous les $x$ examinés pour ce cas sont donc solutions :

$$x \in \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$$

En conclusion, les valeurs de $x$ qui satisfont l'inéquation de départ sont celles qui vérifient

$$x \in \,]-\infty, -2] \cup ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$$

## Question 3.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite $D_1$ passant par les points $(4,-5)$ et $(-2,-4)$.*

(b) *Donnez un vecteur directeur de $D_1$ dont la norme vaut 1.*

(c) *Donnez une équation paramétrique de la droite $D_2$ passant par le point $(-\sqrt{5},\sqrt{2})$ et parallèle à l'axe des y.*

(a) La pente de $D_1$, que nous noterons $m$, vaut

$$m = \frac{-4-(-5)}{-2-4} = \frac{-4+5}{-6} = \frac{-1}{6}.$$

Comme $m \in \mathbb{R}$, $D_1$ n'est pas une droite verticale, une équation cartésienne de $D_1$ est donc de la forme $y = mx+p$. Ici $m = -\frac{1}{6}$, donc $D_1 \equiv y = -\frac{1}{6}x + p$.

Comme $(4,-5) \in D_1$, on trouve $p$ en remplaçant $x$ par 4 et $y$ par $-5$ :

$$-5 = -\frac{1}{6}\cdot 4 + p \Rightarrow p = -5 + \frac{2}{3} = -\frac{13}{3}.$$

Donc $D_1 \equiv y = -\frac{1}{6}x - \frac{13}{3}$ ou encore $D_1 \equiv x + 6y = -26$.

(b) Un vecteur normal de $D_1$ est $(1,6)$. Donc $(-6,1)$ est un vecteur directeur de $D_1$ car

$$\big((1,6) \mid (-6,1)\big) = -6+6 = 0.$$

On a vu au cours que pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, le vecteur $\frac{v}{\|v\|}$ est de norme 1.
Ici, $\|(-6,1)\| = \sqrt{(-6)^2+1^2} = \sqrt{37}$. Donc le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{37}}(-6,1) = \left(\frac{-6\sqrt{37}}{37}, \frac{\sqrt{37}}{7}\right)$$

est un vecteur directeur de $D_1$ dont la norme vaut 1.

(c) Tout vecteur directeur de l'axe des $y$ est de la forme $(0,\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_0$. Prenons par exemple $(0,1)$. Comme $D_2$ est parallèle à l'axe des $y$, $(0,1)$ est aussi vecteur directeur de $D_2$. Puisque de plus $(-\sqrt{5},\sqrt{2}) \in D_2$, on en déduit qu'une équation paramétrique de $D_2$ est

$$(x,y) = (-\sqrt{5},\sqrt{2}) + \lambda(0,1), \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## Question 4.

*Prouver par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{n \geqslant 2}$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} \;=\; 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On note $P(n)$ le prédicat $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} \;=\; 1-\frac{1}{n+1}$. On va prouver par induction que $\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}\, P(n)$.

**Cas de base.** On doit montrer que $P(2)$ est vraie. Cela revient à vérifier que

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k\cdot(k+1)} \;=\; 1-\frac{1}{2+1}.$$

Ce qui revient à vérifier que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=1-\frac{1}{3}$. Ce qui est vrai.

**Cas général.** Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$. On doit montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
On suppose donc que $P(n)$ est vraie, c'est à dire que l'égalité ci-dessous est vérifiée. Il s'agit de l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} \;=\; 1-\frac{1}{n+1}.$$

On doit prouver que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire que l'égalité ci-dessous est vérifiée.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} \;=\; 1-\frac{1}{n+2}.$$

Le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= 1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{(par hypohtèse d'induction)} \\
&= 1-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) \\
&= 1-\frac{n+2-1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= 1-\frac{n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= 1-\frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

montre que $P(n+1)$ est vraie, ce qui termine la preuve.

Question 5. *Soient $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Considérons la droite $D$ d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.*

*(a) Donnez la pente de $D$.*

*(b) Donnez une équation paramétrique de $D$.*

*(c) Donnez une équation cartésienne de la droite $D'$ perpendiculaire à la droite $D$ et passant par l'origine du repère.*

Voir correction du Test 3, 28 septembre 2015, Question 2.