Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 4 (18 octobre 2021) **Correction**

Question 1. *Donnez, en français correct, la négation de la phrase suivante.*

Il existe un nombre naturel n tel que n est premier et n est pair.

La phrase d'origine peut se traduire en la formule $\exists n \in \mathbb{N} \quad P(n) \wedge Q(n)$. La négation de cette formule est $\forall n \in \mathbb{N} \quad \neg P(n) \vee \neg Q(n)$. En traduisant cette formule en français, nous obtenons la phrase ci-dessous.

Quel que soit le nombre naturel n, n n'est pas premier ou n est impair.

Question 2. *Prouvez que les formule suivantes sont vraies. Justifiez vos réponses.*

(a) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \leqslant x+5$.

(b) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} \quad x+y=1$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \leqslant x+5$ si et seulement si $0 \leqslant 5$, ce qui est clairement vrai.

(b) Soit $x \in \mathbb{Z}$. On choisit $y=-x+1$, $-x+1 \in \mathbb{Z}$, vu que $x \in \mathbb{Z}$. Il reste à vérifier que $x+y=1$, c'est-à-dire que $x+(-x+1)=1$, ce qui est clairement vrai.

Question 3. *Prouvez que les formules suivantes sont fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 5$.

(a) Pour montrer que la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1$ est fausse, on montre que sa négation est vraie. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \wedge x < 1$. On choisit $x = \frac{1}{2}$. On que $x \in \mathbb{R}$, que $\frac{1}{2} > 0$, et que $\frac{1}{2} < 1$.

(b) Pour montrer que la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 5$ est fausse, on montre que sa négation est vraie. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y \neq 5$. On choisit $x=0$, on a que $0 \in \mathbb{R}$. Quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on a que $x \cdot y = 0 \cdot y = 0$ et donc $x \cdot y \neq 5$.

Question 4. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{1}{|x|-1} - |x| + 2 > 0.$$

Voir la correction de la question 8 de l'examen du 26 octobre 2009.

Une autre stratégie consiste (par exemple) à faire une distinction en les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$ (afin d'éliminer les valeurs absolues) et ensuite de tour rassembler en une fraction comparée à 0. On discute alors du signe de la fraction en déterminant le signe du numérateur et du dénominateur (un polynôme de degré 2 et 1 respectivement) pour obtenir les ensembles des valeurs de x pour lesquels cette fraction a le signe désiré. On n'oublie pas de « filter » ces résultats par les conditions des cas avant de les rassembler en l'ensemble final des solutions.

Question 5. *Dans chacune des situations suivantes, donnez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2 :*

(a) $D_1 \equiv x - y = 3$ *et* $D_2 \equiv (x,y) = (1,1) + \lambda(-1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(b) $D_1 \equiv x = 2$ *et* $D_2 \equiv 3x - 6 = 0$.

(a) $\big(-1,0\big)$ est un vecteur directeur de D_2. On en déduit que D_2 est une droite horizontale. Une équation cartésienne de D_2 est donc de la forme $y = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\big(1,1\big) \in D_2$, on a $\alpha = 1$. Donc $D_2 \equiv y = 1$. En remplaçant y par 1 dans l'équation de D_1, on a : $x - 1 = 3$, c'est-à-dire $x = 4$. Les droites D_1 et D_2 se coupent donc au point $(4,1)$.

En conclusion $S = D_1 \cap D_2 = \{(4,1)\}$.

(b) L'équation de D_2 s'écrit $3x = 6$ ou encore $x = 2$. Les droites D_1 et D_2 sont donc confondues. Un point $\big(\alpha,\beta\big)$ de la droite d'équation $x = 2$ est de la forme $(2,\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $S = \big\{\big(2,\lambda\big) \mid \lambda \in \mathbb{R}\big\}$.

Question 6. *Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

On note $P(n)$ le prédicat $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$. On va prouver par induction que $\forall n \in \mathbb{N}_0\ P(n)$.

Cas de base. On doit montrer que $P(1)$ est vraie. Cela revient à vérifier que

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = (1+1)! - 1.$$

Ce qui revient à vérifier que $1 \cdot 1! = 2! - 1$. Ce qui est vrai.

Cas de général. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On doit montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
On suppose donc que $P(n)$ est vraie, c'est à dire que l'égalité ci-dessous est vérifiée. Il s'agit de l'hypothèse d'induction :

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

On doit prouver que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire que l'égalité ci-dessous est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! && \text{(par hypohtèse d'induction)} \\
&= (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! - 1 \\
&= (n+1)! \cdot (1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

On a donc bien établi que $P(n+1)$ était vraie. On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ P(n)$ est vraie.

Question 7. *Soit la droite $D \equiv (k+2)x - (k-3)y + k - 7 = 0$, où k est un paramètre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminez pour quelle(s) valeur(s) de k la droite D satisfait la condition donnée. Justifiez votre réponse.*

- *Le point $(-1,4)$ appartient à D.*
  $\big(-1,4\big) \in D$ si l'équation de D est vérifiée lorsque $x = -1$ et $y = 4$. On a

$$\begin{aligned}
(k+2).(-1) - (k-3).4 + k - 7 \quad &\Leftrightarrow \quad -k - 2 - 4k + 12 + k - 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -4k + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -4k = -3 \\
&\Leftrightarrow \quad k = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

  Donc $\big(-1,4\big) \in D$ si $k = \frac{3}{4}$.

- *La droite D et la droite $D_1 \equiv 2x - y = 3$ sont sécantes.*

  On a vu au cours que deux droites D et D_1 sont sécantes si et seulement si le déterminant du système formé par les équations des deux droites est non-nul. Ce déterminant est ici

$$\begin{vmatrix} k+2 & -(k-3) \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

  Il vaut $-(k+2) - 2(-k+3) = -k - 2 + 2k - 6 = k - 8$. Il sera différent de 0 si et seulement si $k \neq 8$. Les droites D et D_1 sont donc sécantes si et seulement si $k \neq 8$.

- *La droite D est le graphe d'une fonction.*

  On a vu au cours qu'une droite D est le graphe d'une fonction si D n'est pas une droite verticale, c'est-à-dire si une équation cartésienne de D est de la forme $y = mx + p$. On a $D \equiv (k-3)y = (k+2)x + k - 7$. Si $k \neq 3$ alors $D \equiv y = \frac{k+2}{k-3}x + \frac{k-7}{k-3}$. Cette équation est bien de la forme $y = mx + p$ (avec $m = \frac{k+2}{k-3}$ et $p = \frac{k-7}{k-3}$). Si $k = 3$, alors $D \equiv 5x - 4$ c'est-à-dire $D \equiv x = \frac{4}{5}$. La droite D est donc verticale et n'est pas le graphe d'une fonction. En conclusion, D est le graphe d'une fonction si $k \neq 3$.