Mathématiques Élémentaires

Test n° 5 (25 octobre 2021) **Correction**

Question 1. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

Pour justifier que la phrase est fausse, montrons que sa négation est vraie. Il faut donc établir que $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \wedge x^2 > y^2$ (pouvez-vous justifier pourquoi c'est la négation de la phrase de départ ?). Afin de montrer la véracité d'un « il existe », nous allons exhiber des quantités qui vérifient la propriété. Prenons $x = -2$ et $y = 1$. On a bien $x \leqslant y$ et $x^2 = 4 > y^2 = 1$.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1$ *est décroissante.*

La définition de « f décroissante » est : $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f,\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Pour montrer que la fonction constante f de l'énoncé satisfait cette définition, on prend $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitraires, on suppose que $x_1 \leqslant x_2$ et on cherche à établir que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Or $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = 1$. On a donc bien que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ne peut être à la fois croissante et décroissante.*

Pour justifier la fausseté de l'affirmation, il suffit d'exhiber une fonction qui est à la fois croissante et décroissante. La fonction constante 1 est croissante (vu au cours) et décroissante (point précédent).[1]

Question 2. *Résolvez l'inéquation suivante :* $\sqrt{x+1} \geqslant x - 2$.

Commençons par déterminer les conditions d'existence. La seule opération qui n'est pas toujours définie est la racine carrée qui demande que son argument soit positif. On travaille donc avec les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire avec $x \in [-1, +\infty[$. Pour éliminer la racine, on doit élever au carré. Pour préserver l'inégalité, on a besoin que les deux membres soient positifs. C'est le cas pour $\sqrt{x+1}$ mais pas forcément pour $x - 2$. Distinguons donc deux cas selon le signe de cette quantité.

- Si $x - 2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in [2, +\infty[$, on peut élever au carré et l'inéquation de départ est équivalente à $x + 1 \geqslant (x-2)^2$ ou encore, après développement du carré et regroupement des termes $x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$. En suivant la méthode vue au cours, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 5x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[1]En fait une fonction f est simultanément croissante et décroissante si et seulement si elle est constante. Pouvez-vous le montrer ?

C'est l'intervalle entre les racines qui nous intéresse. En tenant compte des conditions du cas, les solutions trouvées ici sont

$$x \in \left[2, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right].$$

- Si $x-2<0$, c'est-à-dire $x \in [-1,2[$ au vu des conditions d'existence, on constate que $\sqrt{x+1} \geqslant 0 > x-2$. Tou(te)s les (valeurs de) x de ce cas vérifient donc l'inéquation.

Au final, les solutions de l'inéquation de départ sont celles trouvées dans le premier cas ainsi que celles obtenues dans le second. On obtient donc comme ensemble de solutions

$$[-1,2[\cup \left[2, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] = \left[-1, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right].$$

Question 3.

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2-2=0) \wedge (x<0)$.

On choisit $x=-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. On a bien que $((-\sqrt{2})^2-2=0) \wedge (-\sqrt{2}<0)$. Ce qui prouve que la formule est vraie.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z}\ (a+b)^3 \neq a^2+b^2$.

Afin de montrer que la formule est fausse, on montre que sa négation est vraie. On note φ la formule $\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z}\ (a+b)^3 \neq a^2+b^2$. La négation de φ est la formule $\exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}\ (a+b)^3 = a^2+b^2$. On choisit $a=b=0 \in \mathbb{R}$, on a bien que $(0+0)^3 = 0^2+0^2$. Ce qui prouve que la formule $\neg\varphi$ est vraie, et donc que φ est fausse.

Question 4.

(a) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(1,\sqrt{2},-3)$ et parallèle au plan OYZ.

(b) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-5,-1,2)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x-3z=4$.

(a) On cherche une équation de la forme $ax+by+cz=d$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un vecteur normal de α. Un vecteur normal du plan OYZ est par exemple $(1,0,0)$. Comme α est parallèle à ce plan, c'est aussi un vecteur normal de α. Donc $\alpha \equiv x=d$. Comme $(1,\sqrt{2},-3) \in \alpha$, on en déduit que $d=1$. Donc $\alpha \equiv x=1$.

(b) $(1,0,-3)$ est un vecteur normal du plan. Comme la droite D est perpendiculaire au plan, ce vecteur sera un vecteur directeur de D. Une équation paramétrique de D sera donc $(x,y,z) = (-5,-1,2)+\lambda(1,0,-3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire $\begin{cases} x = -5+\lambda \\ y = -1 \\ z = 2-3\lambda \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x+5 = \lambda \\ y = -1 \\ \frac{z-2}{3} = \lambda \end{cases}$

Un système d'équations cartésiennes de D est donc

$$\begin{cases} x+5 = \frac{z-2}{-3} \\ y = -1 \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} -3x-z = 13, \\ y = -1. \end{cases}$$

Question 5. *Soit le système*

$$\begin{cases} x-\lambda y+\lambda^2 = 0, \\ x+\lambda^2 y+\lambda = 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une unique solution ? Expliquez votre raisonnement.

(b) Pour la ou les valeurs trouvées au point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système. Expliquez votre démarche.

(a) On a vu au cours que le système possède une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul. Ici, le déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda = \lambda(\lambda+1)$. Le déterminant est donc non nul si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$.

(b) Supposons $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$. Notons que le système s'écrit $\begin{cases} x-\lambda y = -\lambda^2 \\ x+\lambda^2 y = -\lambda \end{cases}$. On a vu au cours que l'unique solution du système, que nous noterons (x^*,y^*), est donnée par

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda^2 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-\lambda^4-\lambda^2}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-\lambda^2(\lambda^2+1)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-\lambda(\lambda^2+1)}{\lambda+1}$$

(on peut simplifier car $\lambda \neq 0$) et

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-\lambda+\lambda^2}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{\lambda(-1+\lambda)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

(on peut simplifier car $\lambda \neq 0$).

En conclusion, si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$, alors l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{\left(\frac{-\lambda(\lambda^2+1)}{\lambda+1}, \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)\right\}.$$

Question 6.

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Quel que soit l'entier n, si n est impair, alors* $n+1$ *est pair.*

L'affirmation se traduit par la formule $\forall n \in \mathbb{Z}\ (\exists m \in \mathbb{Z}\ n = 2m+1) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\ n = 2k)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $(\exists m \in \mathbb{Z}\ n = 2m+1)$. On doit montrer que $(\exists k \in \mathbb{Z}\ n = 2k)$. Vu que $n = 2m+1$, on a que $n+1 = 2m+2 = 2(m+1)$. On choisit $k = m+1 \in \mathbb{Z}$, vu que $m \in \mathbb{Z}$, on a bien que $n = 2k = 2(m+1)$. Ce qui prouve que l'affirmation est vraie.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Quel que soit le réel x, si x est strictement négatif , alors* $x+1$ *est strictement positif.*

L'affirmation se traduit par la formule $\forall x \in \mathbb{R}\ (x < 0) \Rightarrow (x+1 > 0)$. On note φ cette formule. Afin de montrer que φ est fausse, nous allons montrer que $\neg\varphi$ est vraie. La formule $\neg\varphi$ est $\exists x \in \mathbb{R}\ (x < 0) \wedge (x+1 \leqslant 0)$. On choisit $x = -2 \in \mathbb{R}$, on a bien que $-2 < 0$ et $-2+1 = -1 \leqslant 0$.