

Mathématique Élémentaire

Examen

(7 novembre 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre sac.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1.

/3

(a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Définissez :

$$y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\hspace{15em}}, \quad (1)$$

$$|x| := \boxed{\hspace{15em}}. \quad (2)$$

(b) À partir des définitions données en (1) et (2), prouvez la formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

/6

(a) Vrai : Faux : $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x < 0) \wedge (x^3 - x^2 + x + 3 \neq 0) \wedge (x < 1)$.

(b) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{Q} \exists b \in \mathbb{Q} \quad 2a - 3b > 0$.

(c) Vrai : Faux : Quel que soit n un entier, si $3n + 1$ est pair alors n est impair.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Soit le système

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3\lambda x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
- (b) Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$ dans l'espace \mathbb{R}^3 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

/6

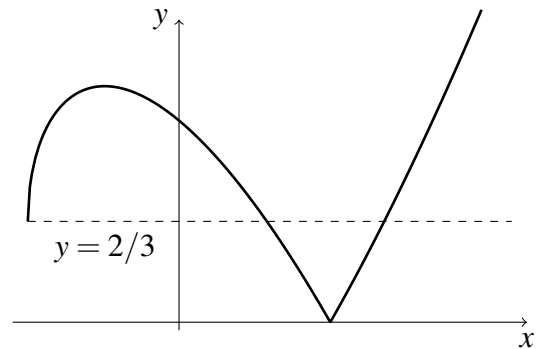
Question 4. Résolvez l'inéquation

$$|x - 1| \left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{3} \right) \leq \frac{2}{3}. \quad (3)$$

/6

Veillez à justifier les étapes de vos calculs.

REMARQUE : Quelques lignes de brouillon peuvent vous aider à développer une stratégie efficace. Pour vous aider à vérifier votre réponse, le graphe des deux membres de l'inégalité sont tracés ci-dessous.



Mathématique Élémentaire

Examen (7 novembre 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Examen

(7 novembre 2022)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Prouver par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6.

/6

- (a) Soit la droite $D_1 \equiv 3x - 5y = 4y - 2 - 7x$. Donnez une équation paramétrique de D_1 .
- (b) Soit la droite $D_2 \equiv (x, y) = (4\lambda - 3, 2 - \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez la pente de D_2 ainsi qu'un point appartenant à D_2 .
- (c) Donnez une équation cartésienne de la droite D_3 perpendiculaire à D_2 et dont l'ordonnée à l'origine vaut 5.