

Mathématique Élémentaire

Examen

(9 janvier 2023)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre sac.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Question 1.

- Un étudiant affirme que $\sqrt{9} = \pm 3$. En effet, dit-il, on a que $3^2 = 9$ et également que $(-3)^2 = 9$, donc les deux nombres 3 et -3 sont bien des racines carrées de 9. Pensez-vous son affirmation et sa justification correctes ? Justifiez votre réponse à partir de la définition de racine carrée.

- Pour l'inéquation $\sqrt{x+3} \geq 7$, un étudiant donne comme condition d'existence $\sqrt{x+3} \geq 0$ ce qui devient, dit-il, après élévation au carré des deux membres, $x+3 \geq 0$ ou encore $x \geq -3$. Un autre étudiant lui répond qu'il ne comprend pas puisque, pour écrire la condition $\sqrt{x+3} \geq 0$, il faut que $\sqrt{x+3}$ existe ! Lequel des deux étudiants a raison ? Ont-ils tous les deux raison ? Comment complétez-vous la phrase « pour que \sqrt{a} existe, il faut que ... » ? Justifiez votre réponse à partir de la définition de racine carrée.

/2

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit le système

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2\lambda x = 7\lambda y \end{cases}$$

/6

où λ est un paramètre réel.

- (a) Résolvez ce système lorsque $\lambda = \sqrt{2}$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Donnez une interprétation géométrique de l'objet décrit par l'ensemble des solutions.
- (b) Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = \sqrt{2}$ dans l'espace \mathbb{R}^3 . Donnez une interprétation géométrique de l'objet décrit par l'ensemble des solutions.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

/6

(a) Vrai : Faux : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x > \frac{3}{4}) \Rightarrow (x \leq x^3)$.

(b) Vrai : Faux : $\exists a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \quad a + b \geq 0$.

(c) Vrai : Faux : $\exists a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{R} \quad (a > 0) \wedge (a + b + c = \sqrt{5})$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/5

(a) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \lambda(-3, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv \frac{2}{3}x + y = 0$ sont confondues.

(b) Vrai : Faux : Quel que soit le réel λ , le système $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x - \lambda y = -\lambda \end{cases}$, où x et y sont les inconnues, admet toujours au moins une solution.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Prouvez que les deux affirmations ci-dessous sont vraies. Pour l'une des affirmations, vous devrez utiliser une preuve par l'absurde et pour l'autre une preuve par induction. Explicitez votre choix avant de démarrer la preuve.

/5

(a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 2$ est un nombre pair.

(b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ on a que $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq \frac{11}{3}$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Résolvez l'inéquation $\frac{x^2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} \leq 1$. Vos calculs doivent être justifiés.

/6

Mathématique Élémentaire

Examen

(9 janvier 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.