

Mathématique Élémentaire

Examen

(16 août 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre sac.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Question 1.

/8

- Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(0, 3)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv -2x = -y + 8$.
- Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 parallèle à l'axe des x et passant par le point $(\pi, \sqrt{2})$.
- Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(\sqrt{2}, \pi, e)$ et parallèle au plan OYZ .
- Donnez une équation cartésienne du plan β passant par $(-1, 5, 2)$ et perpendiculaire à la droite $D' \equiv (x, y, z) = (\lambda - 1, 3 - 2\lambda, 5 + 6\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Mathématique Élémentaire

Examen

(16 août 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 1 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

/8

(a) Vrai : Faux : $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x > 1) \wedge (x^2 < 2)$.

(b) Vrai : Faux : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{R} \quad (a < 0) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{R} \quad b > 0 \wedge a + b < 0)$.

(d) Vrai : Faux : $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \forall b \in \mathbb{Z} \quad (a + b > 0) \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{Z} \quad a + b + c \geq 0)$.

Mathématique Élémentaire

Examen

(16 août 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3.

/3

(a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Définissez :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow \boxed{\phantom{y = \sqrt{x} \Leftrightarrow}}. \quad (1)$$

(b) Donnez un exemple de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lequel on ne peut écrire $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{}$$

(c) Pour un certain intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, il est correct d'affirmer que $\forall a, b \in I, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

■ Donnez le plus grand intervalle I tel que cette propriété soit vérifiée :

$$I = \boxed{}.$$

■ En utilisant (1), prouvez que, pour le I que vous venez de donner, on a bien $\forall a, b \in I, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Veillez à la qualité de votre rédaction.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. On définit la quantité $f_k(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ par

- $f_0(x) = x$,
- $f_{k+1}(x) = |f_k(x)| - 1$.

Prouvez par induction que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in [0, k], |f_k(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in [k, +\infty[, f_k(x) = x - k.$$

/5

Mathématique Élémentaire

Examen

(16 août 2023)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.