Mathématiques Élémentaires

Test n° 2 (26 septembre 2022) **Correction**

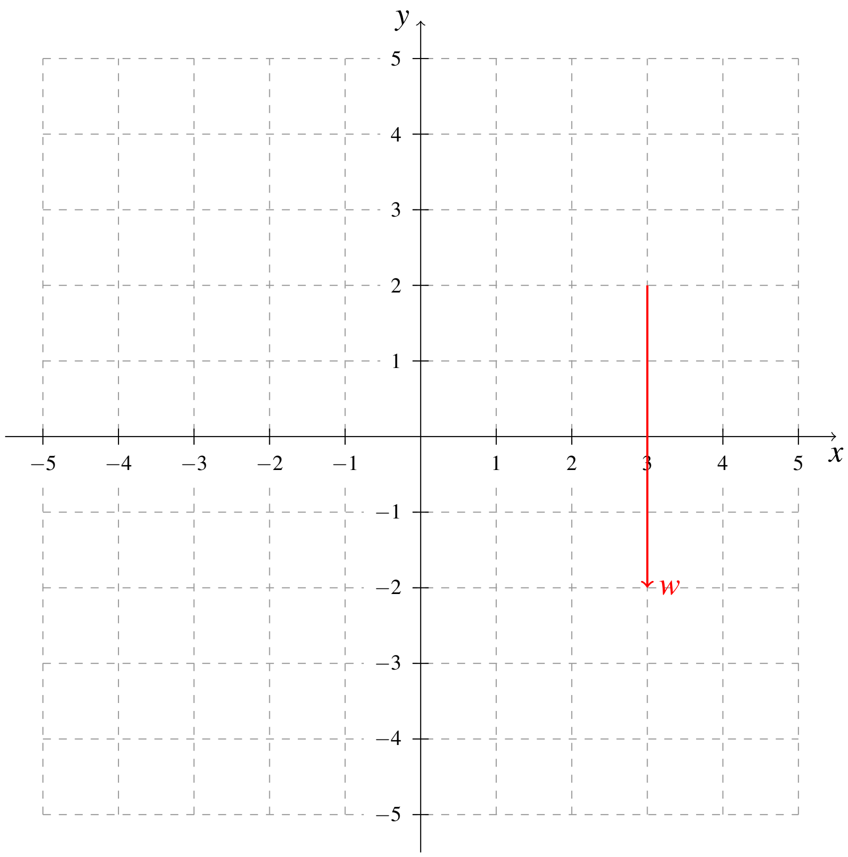
Question 1. *Donnez, en français correct, la négation de la phrase ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

Si Arthur retire Excalibur du rocher, alors il devient roi de Bretagne.

Voir la correction de la question 5 du test 2 du 4 octobre 2021.

Question 2.

(a) Dans le repère ci-dessous, représentez le vecteur w dont l'origine est le point $(3,2)$ et dont l'extrémité est le point $(3,-2)$.



(b) Donnez les composantes du vecteur w. Expliquez votre réponse.

On a vu que le vecteur d'origine u et d'extrémité v est $v-u$.

Donc $w=(3,-2)-(3,2)=(0,-4)$.

(c) Calculez la norme du vecteur w.

Par définition de la norme, on a

$$\|w\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Question 3. *On note φ_1 la formule $P \Rightarrow Q$. On note φ_2 la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$.*

(a) Donnez la table de vérité de φ_1.

(b) Donnez la table de vérité de φ_2.

(c) Prouvez que les formules φ_1 et φ_2 sont équivalentes. Justifiez chaque étape de votre démarche.

(a) Ci-dessous la table de vérité de la formule $P \Rightarrow Q$ (φ_1).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(b) Ci-dessous la table de vérité de la formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (φ_2).

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

(c) Afin de montrer que la formule φ_1 est équivalente à la formule φ_2, nous devons établir que la formule $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ est une tautologie. Pour ce faire, nous allons construire la table de vérité de $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ (en se basant sur les deux tables de vérité ci-dessus).

P	Q	φ_1	φ_2	$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

On remarque que la colonne de la formule $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ ne contient que des 1. Il s'agit donc d'une tautologie, ce qui nous permet de conclure que la formule φ_1 est équivalente à la formule φ_2.

Question 4. *Soient* $u = (-4,3)$ *et* $v = (-1,-2)$. *Calculez*

- $\frac{v}{2} - 3u = \frac{1}{2}(-1,-2) - 3(-4,3) = \big(-\frac{1}{2},-1\big) + (12,-9)$ *par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel dans* $\mathbb{R}^2$.
  $\frac{v}{2} - 3u = \left(\frac{23}{2},-10\right)$ par définition de l'addition de 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

- *la distance entre u et v.*

  On a vu au cours que le vecteur d'origine u et d'extrémité v est $v-u$. Donc la distance entre u et v est $\|v-u\|$.
  Comme $v-u = (3,-5)$, on a $d(u,v) = \|v-u\| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.

Question 5. *Soient* $x = \frac{1}{3}, y = \frac{-1}{5}$ *et* $z = \frac{4}{5}$. *Calculez* $\sqrt{x^2-4yz}$.
On a $x^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ et $4yz = 4\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{16}{25}$.
Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4yz} &= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{25}}\\ &= \sqrt{\frac{25}{225}+\frac{144}{225}}\\ &= \sqrt{\frac{169}{225}}\\ &= \frac{13}{15}.\end{aligned}$$

Question 6. *Soit* $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) *Complétez les phrases suivantes :*

$$\begin{array}{ccc} v = 0 & ssi & v_1 = 0 \text{ et } v_2 = 0 \\ v \neq 0 & ssi & v_1 \neq 0 \text{ ou } v_2 \neq 0 \end{array}$$

(b) *Soit* $u \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur défini par* $u = (\lambda^2+1,0)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Montrez que quelle que soit la valeur de* λ, *on a toujours* $u \neq 0$. *Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Quelle que soit la valeur de λ, on a $\lambda^2+1 \neq 0$ car $\lambda^2+1 \geqslant 1$ vu que $\lambda^2 \geqslant 0$. Donc par le point (a), on a bien $u \neq 0$ vu qu'une de ses composantes est toujours différente de 0.