

# Mathématiques Élémentaires

Test n° 3

(3 octobre 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

**Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test.**

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. On note  $P(n)$  le prédicat ci-dessous.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=0}^n 2k + 1$$

- Écrire explicitement  $P(1)$  et déterminer sa valeur de vérité.
- Écrire explicitement  $P(2)$  et déterminer sa valeur de vérité.

/2

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 2. Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai :  Faux :   $\forall a \in \mathbb{Z} (a \geq 25) \Rightarrow (a + 1 \geq 0)$ .

(b) Vrai :  Faux :   $\forall b \in \mathbb{Z} (b^2 \geq 0) \Rightarrow (b \geq 0)$ .

(c) Vrai :  Faux :   $\exists x \in \mathbb{R} (x > 0) \Rightarrow (x < 0)$ .

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses.

/6

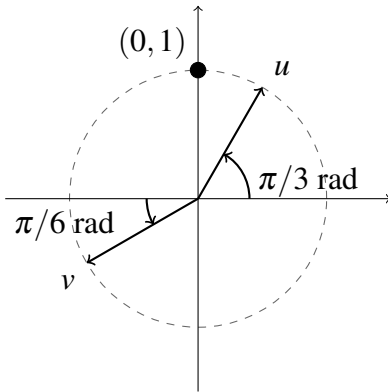
(a) Vrai :  Faux :  Le nombre  $\pi$  est solution de l'inéquation  $\sin\left(\frac{x}{4}\right) \leq x$ .

(b) Vrai :  Faux :  Le nombre  $-\frac{1}{3}$  est solution de l'inéquation  $\sqrt{7x^2 + x} < \frac{5}{7}$ .

(c) Vrai :  Faux :   $\frac{1}{9} \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} < x^{1/2}\right\}$ .

Question 4. Donnez les composantes des vecteurs  $u$  et  $v$  définis sur la figure ci-dessous. Expliquez votre démarche.

/3



Question 5. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Vrai :  Faux :  Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $(1, 0, 1) = \alpha(3, -6, 9) + (0, 2, -2)$ .

/2

# Mathématiques Élémentaires

Test n° 3

(3 octobre 2022)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 6. Résolvez l'inéquation  $\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1}$ . La méthode de résolution *doit* être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.

/ 4

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 7. Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Montrez que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (1)$$

Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

/4