Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 3 (3 octobre 2022) **Correction**

Question 1. *On note $P(n)$ le prédicat ci-dessous.*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} 2k+1$$

(a) Écrire explicitement $P(1)$ et déterminer sa valeur de vérité.

(b) Écrire explicitement $P(2)$ et déterminer sa valeur de vérité.

(a) Le prédicat $P(1)$ est donné par

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \sum_{k=0}^{1} 2k+1$$

Ce qui peut se récrire

$$1^2 = (2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)$$

$P(1)$ est donc faux, vu que 1 n'est pas égal à 4.

(b) Le prédicat $P(2)$ est donné par

$$\sum_{k=1}^{2} k^2 = \sum_{k=0}^{2} 2k+1$$

Ce qui peut se récrire

$$1^2+2^2 = 1+3+5$$

$P(2)$ est donc faux, vu que 5 n'est pas égal à 9.

Question 2. *Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Jusfiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall a \in \mathbb{Z}\ (a \geqslant 25) \Rightarrow (a+1 \geqslant 0)$.

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \Rightarrow (b \geqslant 0)$.

(c) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 0) \Rightarrow (x < 0)$.

(a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \geqslant 25$. On doit montrer que $a+1 \geqslant 0$.

Vu que $a \geqslant 25$, on a également que $a+1 \geqslant 26$.

Vu que $a+1 \geqslant 26$ et que $26 \geqslant 0$, on déduit que $a+1 \geqslant 0$.

(b) Afin de prouver que la formule $\forall b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \Rightarrow (b \geqslant 0)$ est fausse, on montre que sa négation est vraie.

La négation de la formule $\forall b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \Rightarrow (b \geqslant 0)$ est la formule $\exists b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \wedge (b < 0)$.

On choisit $b = -1 \in \mathbb{Z}$. On a bien que $(-1)^2 = 1 \geqslant 0$ et $-1 < 0$. On a donc bien montré que $\exists b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \wedge (b < 0)$ était vraie ; et donc que $\forall b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \Rightarrow (b \geqslant 0)$ était fausse.

(c) On choisit $x = -2 \in \mathbb{R}$, on obtient la formule (propositionnelle) : $(-2 > 0) \Rightarrow (-2 < 0)$. Vu que la prémisse est fausse, l'implication est vraie.

Question 3. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Le nombre π est solution de l'inéquation* $\sin\left(\frac{x}{4}\right) \leqslant x$.

(b) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Le nombre* $-\frac{1}{3}$ *est solution de l'inéquation* $\sqrt{7x^2 + x} < \frac{5}{7}$.

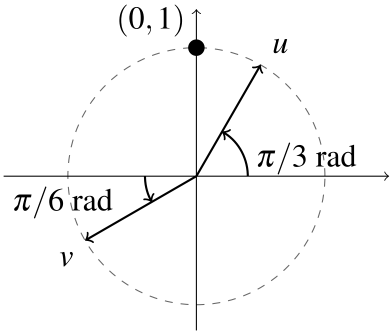
(c) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\frac{1}{9} \in \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} < x^{1/2}\right\}$.

(a) Pour répondre à la question, il faut voir si oui ou non on a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \pi$ ou encore $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \pi$. Cette inéquation est équivalente (après multiplication de ses deux membres par 2) à $\sqrt{2} \leqslant 2\pi$. Comme $\sqrt{2} \leqslant 1{,}5$, on a $\sqrt{2} \leqslant 3 \leqslant 2\pi$ ce qui montre la véracité de l'affirmation (a).

(b) De nouveau, il faut remplacer x par la valeur $-\frac{1}{3}$ et voir si oui ou non l'inégalité est vraie. Après remplacement, on a $\sqrt{7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}} < \frac{5}{7}$ c'est-à-dire $\sqrt{7\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} < \frac{5}{7}$ i.e. $\sqrt{\frac{4}{9}} \leqslant \frac{5}{7}$ i.e. $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$. Après multiplication des deux membres par $21 = 3 \cdot 7 > 0$, cette dernière inégalité est équivalente à $14 < 15$, ce qui est vrai. L'affirmation (b) est donc vraie elle-aussi.

(c) Pour rappel, un élément $a \in \mathbb{R}$ appartient à un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$ si et seulement si la proposition $P(a)$ est vraie. Ici $P(x)$ est $x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} < x^{1/2}$ et donc $P(1/9)$ est $\frac{1}{9}(9-1)^{1/3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}$. Vu que $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$, $P(1/9)$ est équivalent à $\frac{1}{9} \cdot 2 < \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ou encore à $2 < 9/3 = 3$ ce qui est vrai. L'élément $1/9$ appartient donc bien à l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} < x^{1/2}\right\}$.

Question 4. *Donnez les composantes des vecteurs u et v définis sur la figure ci-dessous. Expliquez votre démarche.*



On a vu au cours que tout point w du cercle trigonométrique est de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est l'angle formé par la demi-droite d'origine $(0,0)$ passant par $(1,0)$ et la demi-droite d'origine $(0,0)$ passant par w.
Donc $u = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Pour v, on a $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ rad.
Donc $v = \left(\cos\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Question 5. *L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.*

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Il existe un réel α tel que* $(1,0,1) = \alpha(3,-6,9) + (0,2,-2)$.

L'affirmation revient à chercher un réel α tel que $(1,0,1) = (3\alpha, -6\alpha, 9\alpha) + (0,2,-2)$ par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^3$, cela revient à dire que $(1,0,1) = (3\alpha, -6\alpha+2, 9\alpha-2)$.
Grâce à l'égalité entre deux vecteurs, on déduit que

$$1 = 3\alpha \quad \text{et} \quad 0 = -6\alpha + 2 \quad \text{et} \quad 1 = 9\alpha - 2.$$

Les trois égalités sont vérifiées pour $\alpha = \frac{1}{3}$.
En conclusion, l'affirmation est vraie car en prenant $\alpha = \frac{1}{3}$, on a bien $(1,0,1) = \alpha(3,-6,9) + (0,2,-2)$.

Question 6. *Résolvez l'inéquation* $\dfrac{1}{2x+3} < \dfrac{1}{x+1}$. *La méthode de résolution* doit *être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.*

Commençons par déterminer les conditions d'existence. Puisqu'il y a deux dénominateurs, chacun d'entre-eux doit être non nul. On veut donc

$$2x+3 \neq 0 \quad \text{et} \quad x+1 \neq 0$$

c'est-à-dire $x \neq -3/2$ et $x \neq -1$.
Comme on veut multiplier les deux membres de l'inéquation par chacun de ces deux dénominateurs, il faut en connaître le signe. Par exemple $2x+3 < 0$ si et seulement si $x < -3/2$. En procédant de même pour les autres cas, on trouve le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	

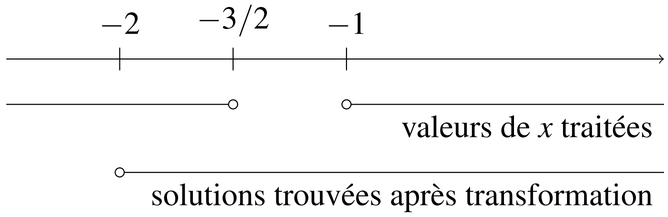
Distinguons deux cas.

- Si $x \in]-\infty, -3/2[\cup]-1, +\infty[$, alors multiplier les deux membres par $2x+3$ et $x+1$ renverse deux fois l'inégalité (pour $x \in]-\infty, -3/2[$ car les deux facteurs sont négatifs) ou ne la change pas (pour $x \in]-1, +\infty[$). Au final, l'inéquation de départ est équivalente à $x+1 < 2x+3$ ou encore, en soustrayant $x+1$ aux deux membres et en simplifiant $0 < x+2$. Ceci est équivalent à $x > -2$ ou encore à $x \in]-2, +\infty[$. Il ne faut cependant pas oublier que ces valeurs ne sont solutions de l'inéquation de départ que si elles satisfont la condition du cas traité, ici $x \in]-\infty, -3/2[\cup]-1, +\infty[$.

  Les solutions *de l'inéquation de départ* trouvées dans ce cas sont donc

  $$x \in]-2, +\infty[\cap \big( ]-\infty, -3/2[\cup]-1, +\infty[\big).$$

  Pour mettre cet ensemble sous la forme d'une union d'intervalles, utilisons la visualisation présentée au cours :

  On voit donc que les valeurs x communes à ces deux ensembles sont

  $$x \in]-2, -3/2[\cup]-1, +\infty[.$$

- Si $x \in]-3/2, -1[$, la multiplication par $2x+3 > 0$ ne change pas le sens de l'inégalité alors que celle par $x+1 < 0$ la renverse.

  L'inéquation de départ est donc équivalente à $x+1 > 2x+3$ ou encore, après simplification, $x < -2$. En tenant compte des conditions du cas, on trouve les solutions

  $$x \in]-\infty, -2[\cap]-3/2, -1[= \varnothing.$$

  Il n'y a donc pas de solution pour ce cas.

Au final, les solutions de l'inéquation de départ sont l'union des solutions trouvées pour chacun des cas. Comme aucune solution n'a été trouvée pour le second cas, on a que

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1} \right\} = \left] -2, -\frac{3}{2} \right[\cup]-1, +\infty[.$$

Question 7. *Soient* $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$*. Montrez que*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1}$$

Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

Par définition de l'addition entre deux vecteurs, on a

$$x+y = (x_1+y_1,\ x_2+y_2) \quad \text{et} \quad x-y = (x_1-y_1,\ x_2-y_2).$$

Donc, $\|x+y\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}$ et $\|x+y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, par définition de la norme d'un vecteur. On a donc :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$$

car $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ et toutes les quantités présentes sous les racines sont bien des réels positifs. Dès lors

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&\qquad = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \\
&\qquad\qquad + x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 && (\text{car } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\qquad = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2 && (\text{après simplification}) \\
&\qquad = 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(y_1^2 + y_2^2) && (\text{par mise en évidence}) \\
&\qquad = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 && (\text{par déf. de la norme}).
\end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité.