Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 4 (10 octobre 2022) **Correction**

Question 1. *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (3,1) + \lambda(2,3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Dites si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

Vrai : $\square$ *Faux :* $\square$ *Le point $\left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right)$ appartient à la droite D.*

Voir correction du test 3, 30 septembre 2019, question 4, point (a).

Question 2. *Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : $\boxed{\checkmark}$ *Faux :* $\square$ $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}\ a+b > 0$.

(b) Vrai : $\boxed{\checkmark}$ *Faux :* $\square$ $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x+y)^2 = x^2 - y^2$.

(c) Vrai : $\boxed{\checkmark}$ *Faux :* $\square$ $\forall a \in \mathbb{Z}\ (\exists k \in \mathbb{Z}\ a = 2k) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}\ a+6 = 2n)$.

(a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. On choisit $b = -a+1$. On a bien que $b \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$. On doit s'assurer que $a+b > 0$. Vu le choix de b, on a que $a+b = a+(-a+1) = a-a+1 = 1 > 0$.

(b) On choisit $y = 0 \in \mathbb{R}$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on doit vérifier que $(x+y)^2 = x^2 - y^2$. Vu le choix de y, on a que $(x+y)^2 = x^2 - y^2$ devient $(x+0)^2 = x^2 - 0^2$. Ce qui est équivalent à $x^2 = x^2$, qui est clairement vrai.

(c) Soit $a \in \mathbb{Z}$. On doit montrer que $(\exists k \in \mathbb{Z}\ a = 2k) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}\ a+6 = 2n)$. En d'autres mots, on doit montrer que si $\exists k \in \mathbb{Z}\ a = 2k$ est vraie, alors $\exists n \in \mathbb{Z}\ a+6 = 2n$ est vraie. (Si la prémisse est fausse, l'implication est automatiquement vraie).

On suppose donc que $a = 2k$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

On doit montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a+6 = 2n$.

Vu que $a = 2k$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, on a que $a+6 = 2k+6 = 2(k+3)$.

On choisit $n = k+3$. Vu que $k \in \mathbb{Z}$, on a également que $n \in \mathbb{Z}$. Et clairement $a+6 = 2n$. Ce qu'il fallait prouver.

Question 3. *Résolvez l'inéquation (sans la remettre sous la forme d'une fraction comparée à 0) :*

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x-4} \leqslant 1. \tag{1}$$

Conditions d'existence : puisque $x-4$ est au dénominateur, il faut que $x-4 \neq 0$ ou encore $x \neq 4$.
Distinguons deux cas :

- Si $x > 4$, alors on peut multiplier les deux membres de (1) par $x-4 > 0$ sans changer le sens de l'inégalité :

  $$(1) \iff (x-2)(x+3) \leqslant x-4 \iff x^2+x-6 \leqslant x-4 \iff x^2-2 \leqslant 0.$$

  Les racines de x^2-2 étant $\pm\sqrt{2}$ et le coefficient de x^2 étant > 0, le tableau de signe est

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

  L'ensemble des solutions de $x^2-2 \leqslant 0$ est $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Cependant on est ici dans le cas des $x > 4$, les solutions correspondantes de (1) sont $[-\sqrt{2},\sqrt{2}] \cap]4,+\infty[= \varnothing$. Autrement dit, ce cas ne donne aucune solution de (1).

- Si $x < 4$, la modification des deux membres de (1) par $x-4$ renverse le sens de l'inégalité. Les calculs sont ensuite les mêmes et on trouve donc $(1) \iff x^2-2 \geqslant 0$. Vu le tableau de signe ci-dessus et en tenant compte qu'on travaille avec $x < 4$, l'ensemble des solutions pour ce cas est

  $$\big(]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[\big) \cap]-\infty,4[=]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},4[.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de (1) est l'union des ensembles de solutions trouvés pour chacun des deux cas, à savoir

$$]-\infty,\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},4[.$$

Question 4. *On considère $P(n)$ le prédicat défini ci-dessous.*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

(a) Prouvez que la proposition $P(0)$ est vraie.

(b) Ecrire explicitement le prédicat $P(n+1)$.

(c) Prouvez par induction que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ est vraie.

(a) Pour prouver que $P(0)$ est vraie, il faut vérifier l'égalité ci-dessous.

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^{0+1} - 1$$

De façon équivalente, $2^0 = 2^1 - 1$ ou encore $1 = 1$, ce qui est clairement vrai.

(b) Le prédicat $P(n+1)$ est donné ci-dessous.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

(c) Afin de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ est vraie, on procède par induction.

Cas de base. Il suffit de vérifier que $P(0)$ est vraie. Ce qui est le cas, c'était l'objet du point (a).

Cas général. On doit montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On doit montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

On suppose donc que $P(n)$ est vraie, il s'agit de l'hypothèse d'induction (rappelée ci-dessous).

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

On doit prouver que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'égalité ci-dessous est satisfaite.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

On sait que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \qquad \text{par hypothèse d'induction} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1
\end{aligned}$$

On a donc bien établi que $P(n+1)$ était vraie. On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ est vraie.

Question 5.

(a) Soit la droite $D_1 \equiv -3y = 5 - 7x$. Donnez la valeur de l'ordonnée à l'origine de D_1 et une équation paramétrique de D_1.

(b) Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 passant par le point $(5,-4)$ et parallèle à la droite D dont une équation paramétrique est $(x,y) = (\lambda, 3\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 passant par le point $\left(\sqrt{2}, \pi\right)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

(a) L'équation de D_1 s'écrit $y = \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$. L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite D_1 et l'axe des ordonnées.

On l'obtient donc en remplaçant dans l'équation x par 0. L'ordonnée à l'origine vaut donc $-\frac{5}{3}$.

L'équation de D_1 étant sous la forme $y = mx + p$, où m est la pente, nous en déduisons que la pente de D_1 vaut $\frac{7}{3}$.

On a vu au cours que le vecteur $(1,m)$ où m est la pente est un vecteur directeur de D_1 et on a aussi que $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ est un point de D_1. Donc $D_1 \equiv (x,y) = \left(0, -\frac{5}{3}\right) + \lambda\left(1, \frac{7}{3}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) On a $D \equiv (x,y) = \lambda(1,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. La pente de D vaut donc 3 et c'est aussi la pente de D_2 car les droites sont parallèles. Vu que la pente de D_2 est bien définie, on a $D_2 \equiv y = mx + p$ avec $m = 3$, c'est-à-dire $D_2 \equiv y = 3x + p$. Comme $(5,-4) \in D_2$, on trouve p en remplaçant x par 5 et y par -4. On a : $-4 = 15 + p$. Donc $p = -19$ et $D_2 \equiv y = 3x - 19$.

(c) Un vecteur directeur de l'axe des ordonnées est de la forme $(0,\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_0$. Prenons par exemple $(0,1)$. C'est donc aussi un vecteur directeur de D_3. Donc $D_3 \equiv (x,y) = \left(\sqrt{2}, \pi\right) + \lambda(0,1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.