Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 5 (17 octobre 2022) **Correction**

Question 1. *Donnez en extension l'ensemble ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \leqslant 9) \wedge (n \text{ est un multiple de } 3 \Rightarrow n+1 \text{ est pair})\}$$

Pour que $n \in \mathbb{N}$ soit un élément de D, il doit satisfaire les deux conditions de la conjonction :

(a) $n \leqslant 9$,

(b) n est un multiple de 3 $\Rightarrow n+1$ est pair.

Au vu de la première condition de la conjonction, on peut restreindre notre recherche aux nombres naturels 0, 1, …, 9.
La seconde condition est de la forme $P(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Il y a deux façons de satisfaire cette implication. Premièrement, quand $P(n)$ et $Q(n+1)$ sont tous les deux vrais, deuxièmement quand $P(n)$ est faux (indépendamment de la valeur de vérité de $Q(n+1)$).
On constate que $P(n)$ est vrai pour $n = 0$, 3, 6 et 9. Nous allons étudier ces quatre cas.

- Quand $n = 0$, on a que $Q(1)$ est faux, donc l'implication n'est pas satisfaite.
- Quand $n = 3$, on a que $Q(4)$ est vrai, donc l'implication est satisfaite.
- Quand $n = 6$, on a que $Q(7)$ est faux, donc l'implication n'est pas satisfaite.
- Quand $n = 9$, on a que $Q(1)$ est vrai, donc l'implication est satisfaite.

On constate que $P(n)$ est faux pour $n = 1$, 2, 4, 5, 7, et 8. Pour ces valeurs, l'implication est automatiquement vérifiée.
En résumé, on a donc

$$D = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}.$$

Question 2. *Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.*

(a) Donnez la pente de D.

(b) Donnez une équation paramétrique de D.

(c) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

Voir la correction du test 3, 28 septembre 2015, question 2.

Question 3. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez.*

(a) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ est un multiple de } 4\} \subseteq \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ est un multiple de } 2\}$.

(b) *Vrai* : ☑ *Faux* : ☐ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\} \cap \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 7\} \subseteq \{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 10\}$.

(c) *Vrai* : ☐ *Faux* : ☑ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3 - y^2 = 0\}$

(a) Par définition de l'inclusion entre deux ensembles, on doit montrer l'affirmation suivante.

Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a est un multiple de 4, alors a est multiple de 2.

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On suppose que a est un multiple de 4. On a donc que la formule $\exists b \in \mathbb{Z}\ a = 4b$ est vraie.

On doit montrer que a est un multiple de 2. On doit donc montrer que $\exists c \in \mathbb{Z}\ a = 2c$ est vraie.

Par hypothèse, on sait que $a = 4b = 2(2b)$.

On choisit $c = 2b \in \mathbb{Z}$ (car $b \in \mathbb{Z}$). On a donc que $a = 2c$. Ce que l'on voulait prouver.

(b) Par définition de l'intersection, on a que

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\} \cap \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 7\} = \{w \in \mathbb{R} \mid w \geqslant 3 \wedge w \leqslant 7\} = \{w \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant w \leqslant 7\}$$

Il nous reste à montrer que

$$\underbrace{\{w \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant w \leqslant 7\}}_{A} \subseteq \underbrace{\{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 10\}}_{B}$$

Par définition de l'inclusion, on doit montrer que quel que soit $a \in \mathbb{R}$, si $a \in A$ alors $a \in B$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $a \in A$. On a donc que $3 \leqslant a \leqslant 7$.

On doit montrer que $a \in B$, c'est-à-dire que $a \leqslant 10$.

Vu que $a \leqslant 7$ et que $7 \leqslant 10$, on peut conclure que $a \leqslant 10$ et donc que $a \in B$.

(c) On note $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 5x^2 + 7x + 1 = 0\}$ et $A_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3 - y^2 = 0\}$.

Par définition de l'égalité d'ensemble, $A_1 = A_2$ si et seulement si $A_1 \subseteq A_2$ **et** $A_2 \subseteq A_1$.

On a donc que $A_1 \neq A_2$ si et seulement si $A_1 \not\subseteq A_2$ **ou** $A_2 \not\subseteq A_1$.

On va montrer que $A_2 \not\subseteq A_1$.

Par définition $A_2 \subseteq A_1$ si et seulement si $\forall w \in \mathbb{R}\ (w \in A_2) \Rightarrow (w \in A_1)$.

En niant cette formule, on obtient donc que $A_2 \not\subseteq A_1$ si et seulement si $\exists w \in \mathbb{R}\ (w \in A_2) \wedge (w \notin A_1)$. Pour montrer que cette formule est vraie, on choisit $0 \in \mathbb{R}$. On a que $0 \in A_2$ (car $0^3 - 0^2 = 0$) et que $0 \notin A_1$ (car $0^3 + 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0$).

Question 4. *Écrivez l'ensemble*

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{|x|-1} - |x| + 2 > 0\right\}$$

sous la forme d'une union minimale d'intervalles disjoints.

Cette question revient à résoudre l'inéquation $\frac{1}{|x|+1} - |x| + 2 > 0$.
Distinguons deux cas.

- Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et l'inéquation devient

$$\frac{1}{x-1} - x + 2 > 0 \tag{1}$$

  Vu le dénominateur, les conditions d'existence sont $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$. Nous voulons multiplier par $x-1$. Distinguons deux sous-cas.

  - Si $x \geqslant 1$, (1) est équivalente à $1 > (x-1)(x-2)$ ou encore à $x^2 - 3x + 1 < 0$.
    Dressons le tableau de signe de ce dernier polynôme (le coefficient de x^2 est > 0, on a donc le signe $+$ à l'extérieur des racines) :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2)

    Comme $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $[1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$ ou encore $]1, \frac{3+\sqrt{5}}{3}[$ vu les conditions d'existence.
  - Si $x < 1$, c'est-à-dire si $x \in [0,1[$, la multiplication par $x-1$ renverse le sens de l'inégalité et (1) est donc équivalent à $x^2 - 3x + 1 > 0$. Au vu du tableau de signes (2) et sachant que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in [0,1[$, l'ensemble des solutions pour ce cas est $[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$.

- Si $x \leqslant 0$, $|x| = -x \geqslant 0$ et on pourrait refaire la même démarche qu'au premier cas après remplacement de $|x|$ par $-x$. Cependant, les calculs vont être les mêmes à ceci prêt qu'on aura $-x$ au lieu de x. On peut donc utiliser directement les conclusions ci-dessus sans refaire les calculs en remplaçant x par $-x$.

  - Si $-x \geqslant 1$, c'est-à-dire si $x \leqslant -1$, l'inéquation (1) est équivalente à $-x \in]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$ c'est-à-dire $x \in]-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1[$.
  - Si $-x \in [0,1[$ c'est-à-dire $x \in]-1,0]$, l'inéquation (1) est équivalente à $-x \in [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$ c'est-à-dire $x \in]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0[$.

En conclusion, chacun des cas donnent un morceau des solutions de (1), on a

$$\begin{aligned} A &= \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \\ &= \left]-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[. \end{aligned}$$

REMARQUE : Vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$, on a que $x \in A$ si et seulement si $-x \in A$. Autrement dit, soit x et $-x$ sont dans A, soit aucun des deux ne l'est. Ceci signifie que A est symétrique par rapport à 0 (voyez-vous pourquoi ?).

Par conséquent, si on pose $A^{\geqslant 0} := A \cap [0, +\infty[$, on a (pouvez-vous le montrer ?) $A = (-A^{\geqslant 0}) \cup A^{\geqslant 0}$ où $-A^{\geqslant 0}$ est le symétrique de $A^{\geqslant 0}$ par rapport à l'origine, à savoir $-A^{\geqslant 0} := \{-x \mid x \in A^{\geqslant 0}\}$. Le premier point de la discussion précédente dit que $A^{\geqslant 0} = [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[\cup]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$. Dès lors $-A^{\geqslant 0} =]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup]-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0[\cup]-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1[$ et on trouve la réponse finale en faisant l'union de $A^{\geqslant 0}$ et $-A^{\geqslant 0}$.

Question 5. *Soit la droite $D \equiv (k+2)x - (k-3)y + k - 7 = 0$, où k est un paramètre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminez pour quelle(s) valeur(s) de k la droite D satisfait la condition donnée. Justifiez votre réponse.*

- *Le point $(-1, 4)$ appartient à D.*

  Voir la correction du test 4, 18 octobre 2021, question 7.

- *La droite D et la droite $D_1 \equiv 2x - y = 3$ sont sécantes.*

  Voir la correction du test 4, 18 octobre 2021, question 7.

- *La droite D est parallèle à la droite $D_2 \equiv 3x - 1 = 0$.*

  La droite D_2 est une droite verticale. On veut donc que D soit aussi une droite verticale. Une équation cartésienne de D doit donc être de la forme $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Autrement dit, il faut que $k - 3$ soit nul, c'est-à-dire qu'on ait $k = 3$.

Question 6. *Soit le système*

$$\begin{cases} x - \lambda y + \lambda^2 = 0 \\ x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

Est-il possible de trouver des valeurs de λ pour lesquelles le système possède une infinité de solutions ? Si oui, donnez les toutes et pour chaque valeur trouvée, donnez l'ensemble des solutions du système. Expliquez votre raisonnement.

Calculons le déterminant du système. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1).$$

On a vu au cours que si le déterminant est nul alors soit le système a une infinité de solutions, soit le système n'a pas de solution.
Ici le déterminant vaut 0 si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

- Si $\lambda = 0$, le système devient
$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$
L'ensemble des solutions est $\{(0,\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$. Il y a une infinité de solutions dans ce cas.

- Si $\lambda = -1$, le système devient
$$\begin{cases} x + y = -1, & (\dagger) \\ x + y = \ \ 1. & (\ddagger) \end{cases}$$
En faisant $(\dagger) - (\ddagger)$, on obtient $0 = -2$, ce qui est faux. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

En conclusion, le système a une infinité de solutions uniquement lorsque $\lambda = 0$.