Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (24 octobre 2022) Correction

Question 1. *Soient les droites $D_1 \equiv x - y = 3$ et $D_2 \equiv (x,y) = (1,1) + \mu(-1,0)$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Donnez l'ensemble S qui décrit l'intersection des droites D_1 et D_2. Expliquez votre raisonnement.*

Voir la correction du test 2, 24 septembre 2007, question 9.

Question 2. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.*

(a) *Définissez :*

f est injective *ssi* $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N} \quad \big(f(a) = f(b)\big) \Rightarrow (a = b)$.

REMARQUE : La formule $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N} \quad (a \neq b) \Rightarrow \big(f(a) \neq f(b)\big)$ est une définition équivalente (par contraposition de l'implication) de l'injectivité de f. Pour prouver l'injectivité, on préfère en général la première version afin de travailler avec des égalités, voir la question 7, point (c).

f n'est pas injective *ssi* $\exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} \quad \big(f(a) = f(b)\big) \wedge (a \neq b)$.

(b) *Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui n'est pas injective et justifiez votre réponse.*

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Afin de montrer que f n'est pas injective, on montre que la formule $\exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} \quad \big(f(a) = f(b)\big) \wedge (a \neq b)$ est vraie.

On choisit $a = 0 \in \mathbb{N}$ et $b = 1 \in \mathbb{N}$, on a bien que $0 \neq 1$ et $f(0) = f(1) = 0$.

Question 3. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(a) *Définissez*

g est surjective *ssi* $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad g(x) = y$.

g n'est pas surjective *ssi* $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \neq y$.

(b) *Donnez un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est surjective et justifiez votre réponse.*

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x + 1$. Afin de montrer que cette fonction est surjective, on montre que la formule $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad g(x) = y$ est vraie.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On doit trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$. On cherche donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $2x + 1 = y$. On choisit $x = \frac{1}{2}(y-1)$. On remarque que $x \in \mathbb{R}$, car $y \in \mathbb{R}$ et $g(x) = 2\frac{1}{2}(y-1) + 1 = y$.

REMARQUE : Il y a bien entendu une variété de fonctions qui sont surjectives. Par exemple, quel que soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x) = ax + b$ est surjective. (Pouvez-vous le montrer ?)

Question 4.

- *Définissez la racine carrée d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ en complétant la phrase suivante :*

  la racine carrée du nombre x est le nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$ et $y \geqslant 0$.

- *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Complétez l'équivalence suivante afin que de membre de droite ne contienne plus de racine carrée :*

$$\sqrt{x} \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant a^2 & \text{si } a \geqslant 0 \\ \text{vrai} & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est croissante sur A ».*

$$\forall x, y \in A, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y). \tag{2}$$

- *En utilisant le fait que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$ est croissante sur un certain ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ (à préciser dans votre réponse), prouvez l'implication « $\Rightarrow$ » de (1).*

  La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour prouver l'implication « $\Rightarrow$ » de (1), distinguons deux cas (exhaustifs) et montrons qu'elle est vraie dans chacun de ces cas.

  - Cas $a \geqslant 0$. Dans ce cas, sous l'hypothèse $\sqrt{x} \geqslant a$, on doit montrer $x \geqslant a^2$. Comme $\sqrt{x} \geqslant 0$ (car dans la définition de racine carrée donnée ci-dessus, on exige « $y \geqslant 0$ ») et $a \geqslant 0$, on peut appliquer la fonction f aux deux membres et préserver l'inégalité : $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 \geqslant a^2$. Or $(\sqrt{x})^2 = x$ vu la définition de racine carrée (qui demande que le $y = \sqrt{x}$ satisfasse $y^2 = x$). On a donc l'inégalité désirée.
  - Cas $a < 0$. Comme $\sqrt{x} \geqslant 0 > a$, l'inégalité est toujours vraie, ce qui explique le second cas de (1).

Question 5. *Écrivez l'ensemble suivant A sous la forme d'une union minimale d'intervalles :*

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leqslant 3 \text{ et } 2x \leqslant \sqrt{x^2 + 1}\}.$$

Par définition de l'intersection de deux ensembles, A peut s'écrire comme $A = B \cap C$ avec $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leqslant 3\}$ et $C := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \leqslant \sqrt{x^2 + 1}\}$.

- Déterminer B revient à résoudre l'inéquation $|x - 1| \leqslant 3$. Distinguons deux cas.

  - Si $x \geqslant 1$, alors $x - 1 \geqslant 0$ et $|x - 1| = x - 1$. L'inéquation devient donc $x - 1 \leqslant 3$ ou encore $x \leqslant 4$. Vu les conditions du cas, les solutions trouvées sont $x \in [1, 4]$.
  - Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et $|x - 1| = -x + 1$. Ici l'inéquation devient $-x + 1 \leqslant 3$, c'est-à-dire $x \geqslant -2$. Les solutions pour ce cas sont $x \in [-2, 1[$.

  En rassemblant les deux cas, on trouve que $B = [1, 4] \cup [-2, 1[= [-2, 4]$.

- Passons à C qui revient à résoudre $2x \leqslant \sqrt{x^2+1}$.
  - Si $x \leqslant 0$, on a que $x \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x^2+1}$ puisque les valeurs d'une racine carrée sont toujours positives. Tous les $x \in]-\infty, 0]$ font donc partie de C.
  - Si $x \geqslant 0$, les deux membres sont positifs et on obtient donc une inéquation équivalente en élevant au carrée : $4x^2 \leqslant x^2+1$. Ceci se réduit à $3x^2 - 1 \leqslant 0$. Le polynôme du second degré ayant pour racines $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ et le coefficient de x^2 étant positif, le polynôme est négatif pour $x \in \left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$. Vu les conditions du cas, les $x \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ sont dans C.

  Par conséquent, $C =]-\infty, 0] \cup \left[0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right] = \left]-\infty, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ (comme nous avons considéré 0 dans chacun des deux cas, il est normal que les ensembles ci-dessus possèdent 0 dans leur intersection).

En conclusion $A = B \cap C = [-2, 4] \cap \left]-\infty, \sqrt{\frac{1}{3}}\right] = \left[-2, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ vu que $\sqrt{\frac{1}{3}} \leqslant 4$.

Question 6.

(a) *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(1, -1, 2)$ et parallèle au plan OYZ.*

(b) *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(-5, -1, 2)$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv z = x$.*

(a) Voir correction du test 4, 10 octobre 2011, question 5, point (a).

(b) On a $\alpha \equiv x - z = 0$. Un vecteur normal de α est donc $(1, 0, -1)$. C'est aussi un vecteur directeur de la droite D puisqu'elle est perpendiculaire au plan α.

Une équation paramétrique de D est donc

$$(x, y, z) = (-5, -1, 2) + \lambda(1, 0, -1), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x = -5 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 2 - \lambda. \end{cases}$$

On en déduit qu'un système d'équations cartésiennes de D est

$$\begin{cases} x + 5 = 2 - z \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x + z = -3 \\ y = -1. \end{cases}$$

Question 7. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *La formule* $P \Rightarrow Q$ *est équivalente à la formule* $Q \Rightarrow P$.

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\forall b \in \mathbb{Z}\ (b^2 \geqslant 0) \Rightarrow (b \geqslant 0)$.

(c) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 5x + 17$ *est injective.*

(a) Afin de montrer que l'affirmation est fausse, on va montrer que la formule $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$ n'est pas une tautologie. Pour ce faire, on construit la table de vérité de cette formule.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

La présence d'au moins un zéro dans la colonne de la formule « $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$ » implique qu'il ne s'agit pas d'une tautologie. Ce qu'il fallait montrer.

(b) Voir correction de la Question 2 du Test numéro 3 du 3 octobre 2022.

(c) Afin de montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x + 17$ est injective, on montre que la formule $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad (f(a) = f(b)) \Rightarrow (a = b)$ est vraie.

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $b \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire que $5a + 17 = 5b + 17$. On en déduit que $5a = 5b$ et donc $a = b$, ce qu'il fallait prouver.