Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 7 (31 octobre 2022) **Correction**

Question 1. *Prouvez à l'aide d'une* **preuve par contraposée** *que l'affirmation suivante est vraie. Veillez à soigner la présentation et la structure de la preuve.*

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, si $7n+6$ est pair, alors n est pair.

L'affirmation que nous devons prouver est de la forme $\forall n \in \mathbb{Z}\ P(n) \Rightarrow Q(n)$. La contraposée de $P(n) \Rightarrow Q(n)$ est $\neg Q(n) \Rightarrow \neg P(n)$. Nous allons donc prouver l'affirmation suivante :

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, si n est impair, alors $7n+6$ est impair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On suppose que n est impair, c'est-à-dire que $\exists k \in \mathbb{Z}\ n = 2k+1$.
On doit montrer que $7n+6$ est impair. On doit donc prouver que la formule $\exists l \in \mathbb{Z}\ 7n+6 = 2l+1$ est vraie.
Par hypothèse, on sait que $n = 2k+1$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
On a donc que $7n+6 = 7(2k+1)+6 = 14k+7+6 = 14k+13 = 14k+12+1 = 2(7k+6)+1$.
On choisit $l = 7k+6 \in \mathbb{Z}$, car $k \in \mathbb{Z}$. On a bien que $7n+6 = 2l+1$.

Question 2. *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$.*

Voir correction du test 5, 13 octobre 2014, question 2.

Question 3.

- *Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissez la valeur absolue $|x|$ de x :*

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

- *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Complétez l'équivalence suivante afin que le membre de droite ne contienne ni valeur absolue, ni division en cas :*

$$|x| \geqslant a \ \Leftrightarrow\ x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a. \tag{2}$$

- *Prouvez, à partir de la définition (1), l'équivalence (2) affirmée au point précédent.*

  Soient x et a deux nombres réels.

  - Commençons par prouver l'implication « $\Rightarrow$ ».
    Supposons que $|x| \geqslant a$ et montrons qu'on a forcément $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$.

* Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$ et l'hypothèse devient $x \geqslant a$. On a donc bien la thèse $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$.
* Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et l'hypothèse devient $-x \geqslant a$. En multipliant par -1, on en déduit $x \leqslant -a$. On a donc bien de nouveau la thèse (la première proposition du « ou » étant cette fois vraie).

- Prouvons maintenant l'implication « $\Leftarrow$ ». Supposons que $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$ et montrons que $|x| \geqslant a$. Vu que $|x| \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la thèse est vraie si $a \leqslant 0$ (sans besoin de l'hypothèse). Il reste à établir la thèse lorsque $a > 0$. Vu l'hypothèse, distinguons deux cas.
  * Si $x \leqslant -a$ est vrai, alors $x \leqslant -a < 0$ et donc $|x| = -x$. En multipliant les deux membres de $x \leqslant -a$ par -1, on a $|x| = -x \geqslant a$, ce qu'on voulait établir.
  * Si $x \geqslant a$ est vrai, alors $x \geqslant a > 0$ et donc $|x| = x \geqslant a$. Ceci conclut la preuve.

Question 4. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Quels que soient a et b deux entiers, s'ils sont tous les deux impairs, alors leur somme est un nombre impair.*

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z} \quad n = 2a\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists b \in \mathbb{Z} \quad n = 3b\}$.

(c) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\, \exists c \in \mathbb{R} \quad (c > a) \wedge (c > b)$.

(a) On traduit l'affirmation en une formule logique. On obtient la formule ci-dessous.

$$\forall a \in \mathbb{Z}\, \forall b \in \mathbb{Z}\, (\exists k \in \mathbb{Z}\; a = 2k+1 \;\wedge\; \exists l \in \mathbb{Z}\; b = 2l+1) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}\; a+b = 2n+1).$$

Afin de prouver que cette formule est fausse, on va prouver que sa négation est vraie. La négation est donnée par :

$$\exists a \in \mathbb{Z}\, \exists b \in \mathbb{Z}\, (\exists k \in \mathbb{Z}\; a = 2k+1) \;\wedge\; (\exists l \in \mathbb{Z}\; b = 2l+1) \;\wedge\; (\forall n \in \mathbb{Z}\; a+b \neq 2n+1).$$

On choisit $a = 1$ et $b = 5$. On a donc que $a + b = 6$.

Vu que l'on a une conjonction, on doit montrer que chacun de ses membres est vrai.

La formule $\exists k \in \mathbb{Z}\; a = 2k+1$ signifie que a est impair, ce qui est le cas.

La formule $\exists l \in \mathbb{Z}\; b = 2l+1$ signifie que b est impair, ce qui est le cas.

La formule $\forall n \in \mathbb{Z}\; a+b \neq 2n+1$ signifie que $a+b$ n'est pas impair, et donc pair, ce qui est bien le cas.

On a donc bien que l'affirmation de départ était fausse.

(b) On note $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z} \quad n = 2a\}$ et $A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists b \in \mathbb{Z} \quad n = 3b\}$. On remarque que A_2 correspond aux nombres pairs (ou multiples de 2), et que A_3 correspond aux multiples de 3.

Par définition de l'égalité d'ensemble, $A_2 = A_3$ si et seulement si $A_2 \subseteq A_3$ **et** $A_3 \subseteq A_2$.

On a donc que $A_2 \neq A_3$ si et seulement si $A_2 \not\subseteq A_3$ **ou** $A_3 \not\subseteq A_2$.

On va montrer que $A_2 \not\subseteq A_3$.

Par définition $A_2 \subseteq A_3$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}\ (n \in A_2) \Rightarrow (n \in A_3)$.

En niant cette formule, on obtient donc que $A_2 \not\subseteq A_3$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{Z}\ (n \in A_2) \wedge (n \notin A_3)$. Pour montrer que cette formule est vraie, on choisit $2 \in \mathbb{Z}$. On a que $2 \in A_2$ (car 2 est un nombre pair) et que $2 \notin A_3$ (car 2 n'est pas un multiple de 3).

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R}$.

On choisit $c = \max(a,b) + 1$. On a bien que $c \in \mathbb{R}$. De plus $a \leqslant max(a,b)$ et $b \leqslant max(a,b)$. Donc $c > a$ et $c > b$.

Question 5. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\left|\sqrt{x-1} - x + 3\right| < 1. \tag{3}$$

Veillez à justifier chacune des étapes de vos calculs.

Conditions d'existence : La seule opération qui n'existe pas pour tout réel est la racine carrée qui demande que son argument soit positif. On a donc besoin que $x - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 1$.

L'inégalité (3) est de la forme $|\xi| < a$ avec $\xi = \sqrt{x-1} - x + 3$ et $a = 1$. Or on a l'équivalence $|\xi| < a \Leftrightarrow (-a < \xi$ et $\xi < a)$. L'inéquation (3) est donc équivalente à

$$-1 < \sqrt{x-1} - x + 3 \text{ et } \sqrt{x-1} - x + 3 < 1$$

ou encore

$$\sqrt{x-1} > x - 4 \text{ et } \sqrt{x-1} < x - 2 \tag{4}$$

Résolvons indépendamment chacune de ces deux inéquations. Pour celle de gauche,

- Si $x - 4 < 0$ i.e., $x \in [1, 4[$, alors x est forcément solution car une racine carrée est toujours positive ($\sqrt{x-1} \geqslant 0 > x - 4$).
- Si $x - 4 \geqslant 0$ i.e., $x \in [4, +\infty[$, alors les deux membres de l'inégalité sont $\geqslant 0$ et on obtient une inégalité équivalente en les élevant au carrée :

  $$x - 1 > (x-4)^2 \text{ ou encore } x^2 - 9x + 17 < 0.$$

  Le tableau de signe de ce polynôme du second degré est

x	$-\infty$		$\frac{9-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{9+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 9x + 17$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vu que $3 < \sqrt{13}$, on en déduit que $\frac{9-\sqrt{13}}{2} < 4 < \frac{9+\sqrt{13}}{2}$ et donc que les solutions pour ce cas sont $x \in \left[4, \frac{9+\sqrt{13}}{2}\right[$.

L'inéquation de gauche est donc équivalente à $x \in [1,4[\cup \left[4, \frac{9+\sqrt{13}}{2}\right[= \left[1, \frac{9+\sqrt{13}}{2}\right[$. Pour l'inéquation de droite, distinguons également deux cas.

- Si $x-2 \leqslant 0$ i.e. $x \in [1,2]$, alors x ne peut être solution car $\sqrt{x-1} \geqslant 0$ ne peut être strictement inférieur à un nombre négatif.
- Si $x-2 > 0$ i.e., $x \in]2,+\infty[$, les deux membres sont positifs et on peut les élever au carré pour obtenir une inéquation équivalente : $x-1 < (x-2)^2$ ou encore $x^2-5x+5 > 0$. Le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-5x+5		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$ impliquent que les solutions pour ce cas sont les $x \in \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation de droite est donc $\varnothing \cup \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

Pour avoir maintenant l'ensemble des solutions de (3) il faut faire l'intersection des ensembles de solutions des deux inéquations précédemment traitées (vu le « et » qui les lie dans (4)) :

$$\left[1, \frac{9+\sqrt{13}}{2}\right[\cap \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[= \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{9+\sqrt{13}}{2}\right[.$$

Cette dernière égalité est due au fait que $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{9+\sqrt{13}}{2}$ (en effet, ceci est équivalent à $\sqrt{5} < 4 + \sqrt{13}$ ce qui est vrai car $\sqrt{5} < 4$).

Question 6. *Soit le système*

$$\begin{cases} (\lambda-3)x + y = 0 \\ x + (\lambda-3)y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.
Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ en expliquant votre démarche et interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Voir correction du test 4, 8 octobre 2007, question 7.