Mathématiques Élémentaires

Test n° 2 (26 septembre 2022) **Correction**

Question 1. *Soient $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Définissez la norme de u, notée $\|u\|$, et le produit scalaire de u et v, noté $(u|v)$.*

La norme de u, notée $\|u\|$, est définie par $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
Le produit scalaire de u et v, noté $(u|v)$, est défini par $(u|v) = u_1v_1 + u_2v_2$.

Question 2.

(a) Donnez la table de vérité de $Q \Rightarrow P$.

(b) Donnez la définition d'une tautologie.

(c) Donnez la contraposée de la formule $Q \Rightarrow P$.

(d) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse. Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

(i) Vrai : ☑ Faux : ☐ La formule $Q \Rightarrow P$ est équivalente à sa contraposée.

(a) La table de vérité de $Q \Rightarrow P$ est donnée par :

Q	P	$Q \Rightarrow P$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(b) Une tautologie est une formule qui est toujours vraie.

(c) La contraposée de la formule $Q \Rightarrow P$ est la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

(d) Afin de prouver que la formule $Q \Rightarrow P$ est équivalente à sa contraposée, nous devons montrer que la formule $\varphi \equiv (Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$ est une tautologie. Pour ce faire, nous construisons la table de vérité de φ.

Q	P	$Q \Rightarrow P$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	φ
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Vu que la colonne associée à la formule φ ne contient que des 1, la formule φ est toujours vraie, c'est donc bien une tautologie.

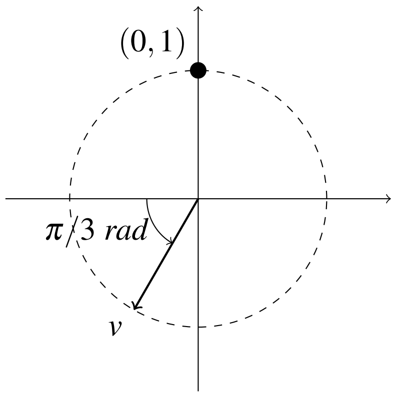
Question 3.

(a) *Donnez les composantes du vecteur v dont l'origine est le point $(5,2)$ et l'extrémité est le point $(5,-2)$. Expliquez votre démarche.*

(b) *Soient les vecteurs $u=(0,-3)$ et $v=(4,-1)$. Calculez*

- $2v-u=$
- $(u|-3v)=$
- $\|u-v\|=$
- *la distance entre u et v :*

(c) *Donnez les composantes du vecteur v défini sur la figure ci-dessous. Expliquez votre démarche.*



Voir correction du Test 2, 23 septembre 2019, Question 3.

Question 4. *Soit $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.*

(a) *Complétez les phrases suivantes :*

$v=0$	*ssi*	$v_1=0$ et $v_2=0$.
$v\neq 0$	*ssi*	$v_1\neq 0$ ou $v_2\neq 0$.

(b) *Soit $u\in\mathbb{R}^2$ le vecteur défini par $u=(\lambda^2+\lambda,\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $u=0$? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Par (a), on a $u=0$ ssi $\lambda^2+\lambda=0$ et $\lambda=0$.
Or $\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)$.
Donc $\lambda^2+\lambda=0$ ssi $\lambda=0$ ou $\lambda=-1$.
En conclusion, $u=0$ ssi $\lambda=0$ car c'est la seule valeur qui annule simultanément les deux composantes de u.