Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (2 octobre 2023) **Correction**

Question 1. *Soit P et Q des propositions. Supposons que Q soit fausse. Dans cette situation, établissez que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P$.*

On cherche à savoir si les formules $\neg P$ et $P \Rightarrow Q$ sont équivalentes, sous l'hypothèse que Q est fausse. De façon générale, pour savoir si deux formules φ_1 et φ_2 sont équivalentes, on doit montrer que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ est une tautologie.

On va construire la table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$ et se restreindre ici aux lignes où Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$
1	1	1	0	0
1	**0**	**0**	**0**	**1**
0	1	1	1	1
0	**0**	**1**	**1**	**1**

On constate bien que, sous l'hypothèse que Q est fausse (lignes 2 et 4), la formule $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P$ est toujours vraie.

Autre réponse possible.

On sait (vu au cours) que $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.

Sous l'hypothèse que $Q \equiv 0$, on a donc que $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee 0 \equiv \neg P$.

Question 2. *Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par les points $(-3,-4)$ et $(-1,4)$. Expliquez votre démarche.*

Une équation paramétrique de D est de la forme $(x,y) = (x_1,y_1) + \lambda(x_d,y_d)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, où (x_1,y_1) est un point de D et (x_d,y_d) est un vecteur directeur de D. Comme $(-3,-4)$ et $(-1,4)$ sont deux points de D, le vecteur v d'origine $(-3,-4)$ et d'extrémité $(-1,4)$ est un vecteur directeur de D. On a $v = (-1-(-3), 4-(-4)) = (2,8)$. Ainsi, une équation paramétrique de D est $(x,y) = (-3,-4) + \lambda(2,8)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Soient les droites* $D_1 \equiv (x,y) = (-3,0) + \lambda(-5,2)$*, où* $\lambda \in \mathbb{R}$*, et* $D_2 \equiv (x,y) = (2,1) + \mu(-\pi,0)$*, où* $\mu \in \mathbb{R}$*.*

- *Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Le point* $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$ *appartient à la droite* D_1*.*

$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}) \in D_1$ si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{5}) = (-3,0) + \lambda(-5,2)$. Cette égalité revient à dire que

$$-\frac{5}{2} = -3 - 5\lambda \tag{1}$$

et

$$\frac{1}{5} = 2\lambda \tag{2}$$

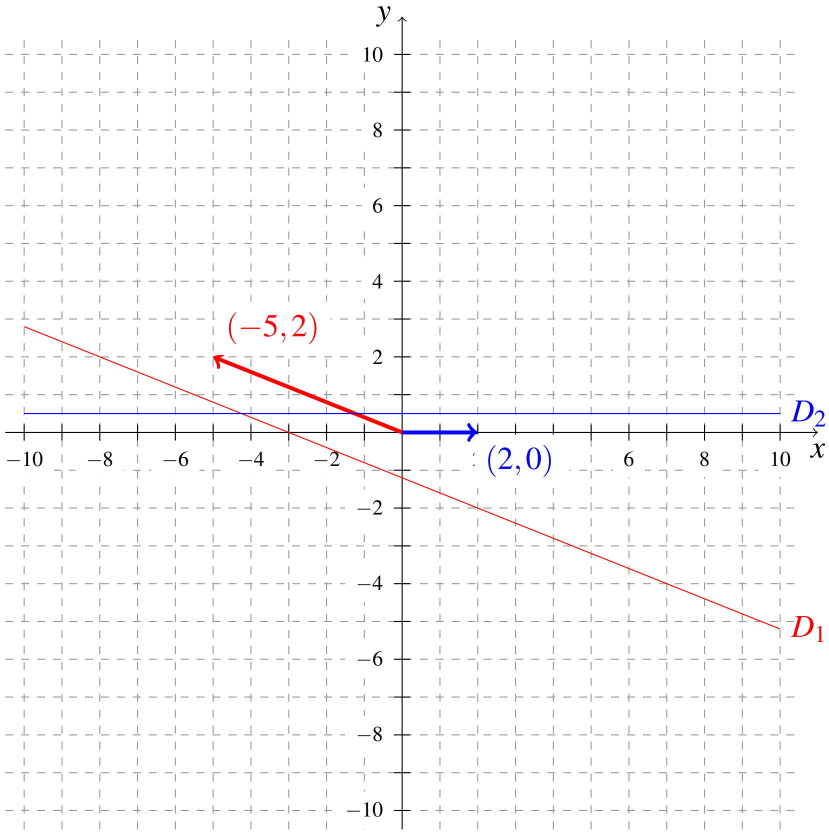
L'équation (2) dit que $\lambda = \frac{1}{10}$ et en remplaçant dans (1), l'égalité n'est pas vérifiée car $-\frac{5}{2} \neq -\frac{7}{2}$. On ne peut donc pas trouver de réel λ tel que (1) et (2) soient vérifiées en même temps.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur* $(2,0)$ *est un vecteur directeur de* D_2*.*

Le vecteur $(-\pi,0)$ est un vecteur directeur de D_2. Or, $(-\pi,0) = -\frac{\pi}{2}(2,0)$. Autrement dit, les vecteurs $(-\pi,0)$ et $(2,0)$ sont colinéaires et ont la même direction. Donc $(2,0)$ est un vecteur directeur de D_1.

- *Représentez graphiquement les droites* D_1 *et* D_2 *dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

D_1 passe par le point $(-3,0)$ et a pour vecteur directeur $(-5,2)$. D_2 passe par le point $(2,1)$ et a pour vecteur directeur $(2,0)$ par le point (b).



Question 4.

(a) Donnez la phrase quantifiée qui exprime la compatibilité de l'ordre avec l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \ \Rightarrow\ x + z \leqslant y + z.$$

(b) Donnez la phrase quantifiée qui exprime la compatibilité de l'ordre avec la multiplication :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leqslant y \wedge z \geqslant 0) \ \Rightarrow\ xz \leqslant yz.$$

(c) À partir (uniquement) des propriétés (a) et (b), prouvez que $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 \geqslant 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ arbitraire. Nous devons montrer que $a^2 \geqslant 0$. À cette fin, distinguons deux cas.

- Si $a \geqslant 0$, en utilisant (b) avec $x = 0$, $y = a$ et $z = a$, on a $(0 \leqslant a \wedge a \geqslant 0) \Rightarrow 0 \cdot a \leqslant a \cdot a$. La prémisse de l'implication étant vraie (vu le cas dans lequel on est), sa conclusion l'est également : $0 = 0 \cdot a \leqslant a \cdot a = a^2$. Ceci prouve donc ce qu'on voulait pour ce cas.
- Si $a < 0$ (c'est-à-dire $a \leqslant 0$ et $a \neq 0$), alors en utilisant (a) avec $x = a$, $y = 0$ et $z = -a$, on obtient $a \leqslant 0 \Rightarrow a - a \leqslant 0 - a$. Comme la prémisse est vraie, on a donc que $0 \leqslant -a$. Le premier point appliqué à $-a$ implique que $(-a)^2 \geqslant 0$. Or $(-a)^2 = a^2$, ce qui établit la thèse pour ce second cas.

En conclusion, que $a \geqslant 0$ ou $a < 0$, on a bien établit que $a^2 \geqslant 0$.

Question 5. *Prouvez que les formules suivantes sont vraies.*

(a) $\exists a \in \mathbb{N} \quad a \geqslant -6.$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0.$

(c) $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall d \in \mathbb{R} \quad c \cdot d = 0.$

(a) On choisit $a = 2 \in \mathbb{N}$. On a que $2 \geqslant 6$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On choisit $y = -x + 1 \in \mathbb{R}$, car $x \in \mathbb{R}$.

Il reste à vérifier que $x + y > 0$. Vu le choix de y, cela revient à vérifier que $x - x + 1 > 0$, ce qui est équivalent à $1 > 0$, qui est vrai.

(c) On choisit $c = 0 \in \mathbb{R}$.

Soit $d \in \mathbb{R}$.

On doit vérifier que $c \cdot d = 0$. Vu le choix de c, cela revient à vérifier que $0 \cdot d = 0$, quel que soit $d \in \mathbb{R}$, ce qui est vrai.