# Mathématiques Élémentaires

## Test n° 4 (9 octobre 2023) **Correction**

---

Question 1. *Rappelons que $1/x$ est défini comme l'unique nombre $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$. À partir de cette définition et de la compatibilité de l'ordre avec l'addition et la multiplication (que vous rappellerez si vous les utilisez), prouvez que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0.$$

*La qualité de votre rédaction est importante.*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < 0$. Supposons au contraire que $y := 1/x \geqslant 0$. Comme $x < 0$, en ajoutant $-x$ aux deux membres,[1] on obtient $0 < -x$. La compatibilité de l'ordre avec la multiplication[2] implique que $(-x)y \geqslant 0$. Or $(-x)y = -x\frac{1}{x} = -1$. Cette contradiction conclut l'argument.

Question 2.

*(a) Soit la droite $D_1 \equiv -3y - 2x = 1 - 6y + 5x$. Donnez une équation cartésienne de la droite $D$ dont l'ordonnée à l'origine vaut $-5$ et qui est parallèle à $D_1$. Expliquez votre démarche.*

*(b) Soit la droite $D_2 \equiv (x, y) = (2\lambda - 1, -4 - 4\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une équation cartésienne de la droite $D'$ parallèle à $D_2$ et passant par le point $(3, 0)$. Expliquez votre démarche.*

*(c) Donnez une équation cartésienne de la droite $D_3$ passant par le point $(\sqrt{2}, \pi)$ et qui est parallèle à l'axe des ordonnées. Expliquez votre démarche.*

(a) L'équation de $D_1$ s'écrit $-7x + 3y = 1$. Donc $(-7, 3)$ est un vecteur normal de $D_1$. Comme $D$ et $D_1$ sont parallèles, $(-7, 3)$ sera aussi un vecteur normal de $D$. Donc $D \equiv -7x + 3y = c$. Comme l'ordonnée à l'origine vaut $-5$, cela signifie que le point $(0, -5)$ appartient à $D$. On trouvera donc la valeur de $c$ en remplaçant $x$ par 0 et $y$ par $-5$ dans l'équation.

On a donc $c = -15$ En conclusion, $D \equiv -7x + 3y = -15$.

(b) On a $D_2 \equiv (x, y) = (-1, -4) + \lambda(2, -4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $(2, -4)$ est donc un vecteur directeur de $D_2$. C'est aussi un vecteur directeur de $D'$ puisque les droites sont parallèles. Par conséquent, le vecteur $(4, 2)$ sera un vecteur normal de $D'$ car il est orthogonal au vecteur $(2, -4)$.

En effet, $\big((2, -4) \bigm| (4, 2)\big) = 8 - 8 = 0$. Donc $D' \equiv 4x + 2y = c$. Comme $(3, 0) \in D'$, on trouve $c$ en remplaçant $x$ par 3 et $y$ par 0, ce qui donne $c = 12$.

(c) On a vu qu'une droite parallèle à l'axe des ordonnées à une équation cartésienne de la forme $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme $(\sqrt{2}, \pi) \in D_3$, on a $c = \sqrt{2}$. Donc $D_3 \equiv x = \sqrt{2}$.

---

[1] Ceci utilise la compatibilité de l'ordre avec l'addition, à savoir $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ x + z \leqslant y + z$. En effet $x < 0$ signifie $x \leqslant 0$ et $x \neq 0$. La compatibilité de l'ordre avec l'addition implique $0 \leqslant -x$. De plus $-x \neq 0$ (puisque $-x = 0$ est équivalent à $x = 0$ et que ce dernier est faux). Donc $0 < -x$.

[2] Pour rappel : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \wedge z \geqslant 0) \ \Rightarrow\ xz \leqslant yz$.

Question 3. *Résolvez l'inéquation suivante sans la remettre sous la forme d'une fraction unique (mais en séparant en cas, comme vu au cours) :*

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{x-2}{x^2}. \tag{1}$$

Commençons par déterminer les conditions d'existence. Puisque $x+1$ et $x^2 = x \cdot x$ sont au dénominateur, ils doivent être non nuls. Autrement dit, l'expression (1) a un sens si $x \neq -1$ et $x \neq 0$. Comme nous allons multiplier les deux membres de (1) par $x+1$, nous avons besoin de connaître son signe. Comme il s'annule en $x = -1$ et que le coefficient de $x$ est positif, le tableau de signe est le suivant :

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Nous allons également multiplier les deux membres de (1) par $x^2$ mais il n'y a pas lieu de distinguer de cas pour cela car $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Distinguons donc deux cas en fonction du signe de $x+1$.

- Si $x+1 > 0$, c'est-à-dire <u>si $x > -1$</u>, la multiplication des deux membres de (1) par $x+1$ puis par $x^2$ donne
$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant (x+1)(x-2).$$
En développant le membre de droite et en ajoutant $-x^2$ aux deux membres de l'inéquation, on trouve que (1) est équivalente à $0 \leqslant -x-2$. En ajoutant $x$ aux deux membres, on a finalement que
$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -2.$$
Parmi les $x > -1$, les solutions de (1) sont les $x$ qui vérifient $x \leqslant -2$. Comme il n'y a aucune valeur de $x$ qui vérifie ces deux contraintes, il n'y a aucune solution pour ce cas.
- Si $x+1 < 0$, c'est-à-dire <u>si $x < -1$</u>, la multiplication par $x+1$ renverse l'inégalité puis des transformations similaires au premier cas montrent que
$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -2.$$
Parmi les $x < -1$, les solutions de (1) sont les $x$ qui vérifient $x \geqslant -2$. Autrement dit, les solutions de ce cas vérifient $x \geqslant -2 \wedge x < -1$ ou encore, par définition de l'intervalle, $x \in [-2, -1[$.

En conclusion, pour que $x \in \mathbb{R}$ vérifie l'inéquation (1), il faut et il suffit que $x$ soit une solution trouvée dans le premier cas (il n'y en a aucune) ou dans le second. Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2, -1[.$$

**Question 4.** *Soient $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite $D$ d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

*(a) Donnez la pente de D. Expliquez votre démarche.*

*(b) Donnez deux points de D. Expliquez votre démarche.*

*(c) Donnez deux vecteurs directeurs de D. Expliquez votre démarche.*

(a) L'équation donnée s'écrit $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1$ où encore $y = -\dfrac{b}{a}x + b$. La pente de $D$ vaut donc $-\dfrac{b}{a}$ car on a vu que lorsqu'une équation peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$, ce qui est le cas ici, la pente vaut $m$.

(b) Le point $(a,0)$ appartient à $D$ car si on remplace $x$ par $a$ et $y$ par 0 dans l'équation, on a $\dfrac{a}{a} = 1$, ce qui est vrai.

On montre par un raisonnement semblable que $(0,b) \in D$.

(c) On a vu au cours que si on connaît la pente $m$ d'une droite non verticale, alors le vecteur $(1,m)$ est un vecteur directeur de la droite. Par (a), le vecteur $(1, -\frac{b}{a})$ sera donc un vecteur directeur de $D$.

On sait aussi que tout vecteur colinéaire à $(1, -\frac{b}{a})$ sera encore un vecteur directeur de $D$. Prenons $(a, -b)$. On a $(a, -b) = a(1, -\frac{b}{a})$, ce qui montre que les deux vecteurs sont colinéaires. Donc $(a, -b)$ est aussi un vecteur directeur de $D$.

**Question 5.** *Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses de façon rigoureuse et formelle.*

*(a) Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad (b \geqslant 0) \Rightarrow (a < b)$.

*(b) Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R}\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0$.

(a) On choisit $a = -1 \in \mathbb{R}$.

Soit $b \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :

(i) Si $b < 0$, la formule est vraie, car la prémisse de l'implication est fausse.

(ii) Si $b \geqslant 0$, on doit s'assurer que $a < b$, ce qui revient à prouver que $-1 < b$. Vu que $-1 < 0 \leqslant b$, nous avons bien que la formule est vraie.

La formule est donc vraie, quel que soit $b \in \mathbb{R}$.

(b) Afin de montrer que la formule est fausse, nous allons montrer que sa négation est vraie. La négation de la formule est donnée ci-dessous.

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R}\ \exists x_3 \in \mathbb{R} \quad x_1 + x_2 + x_3 < 0$$

On choisit $x_1 = 0 \in \mathbb{R}$.

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$.

On choisit $x_3 = -x_2 - 1 \in \mathbb{R}$, car $x_2 \in \mathbb{R}$. Il reste à prouver que $x_1 + x_2 + x_3 < 0$, ce qui est équivalent à $0 + x_2 - x_2 - 1 < 0$, c'est-à-dire $-1 < 0$ qui est clairement vrai.

Question 6. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses de façon rigoureuse et formelle, en commençant par traduire l'affirmation en une formule logique.*

*(a) Vrai : ☐ Faux : ☑ Il existe un unique nombre réel strictement supérieur à 17.*

*(b) Vrai : ☑ Faux : ☐ Pour tout nombre entier, si il est impair, alors son carré est impair.*

(a) L'affirmation est traduite par la formule logique $\varphi$ suivante.

$$\varphi \equiv \exists x \in \mathbb{R} \quad \big(x > 17 \ \wedge\ \forall y \in \mathbb{R} \quad (y > 17 \Rightarrow x = y)\big).$$

Pour prouver que $\varphi$ est fausse, nous montrons que $\neg\varphi$ est vraie. La négation de $\varphi$ est donnée ci-dessous.

$$\neg\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x \leqslant 17 \ \vee\ \exists y \in \mathbb{R} \quad (y > 17 \wedge x \neq y)\big).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Nous distinguons deux cas :

(i) Si $x \leqslant 17$, la formule est vraie (car l'une des deux parties de la disjonction est vraie).

(ii) Si $x > 17$, nous devons montrer que la formule $\exists y \in \mathbb{R} \quad (y > 17 \wedge x \neq y)$ est vraie. Pour ce faire, on choisit $y = x + 1 \in \mathbb{R}$, car $x \in \mathbb{R}$. Nous avons bien que $y > 17$ car $y = x + 1 > 17 + 1 > 17$. Nous avons également que $x \neq y$. En effet $x \neq x + 1$ est équivalent à $0 \neq 1$, ce qui est vrai.

La formule est donc vraie, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

(b) L'affirmation est traduite par la formule logique $\psi$ suivante.

$$\psi \equiv \forall a \in \mathbb{Z} \quad (\exists n \in \mathbb{Z} \quad a = 2n + 1) \ \Rightarrow\ (\exists k \in \mathbb{Z} \quad a^2 = 2k + 1).$$

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On suppose que la formule $\exists n \in \mathbb{Z} \quad a = 2n + 1$ est vraie.

On doit montrer que la formule $\exists k \in \mathbb{Z} \quad a^2 = 2k + 1$ est vraie.

Par hypothèse, il existe un entier $n$ tel que $a = 2n + 1$. Nous avons donc que $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

On pose $k = 2n^2 + 2n \in \mathbb{Z}$, car $n \in \mathbb{Z}$ et que le produit et la somme d'entiers est un entier.

De plus, on a bien que $a^2 = 2k + 1$.