

Mathématiques Élémentaires

Test n° 5

(16 octobre 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles. Ceci doit être fait *pendant* la durée impartie au test.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Donnez en extension l'ensemble ci-dessous. Justifiez votre réponse.

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 10 \wedge (a \text{ est pair} \Rightarrow a + 1 \text{ est un multiple de } 5)\}$$

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2.

/2

- Complétez la définition suivante : « Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que b est la racine carrée de a si

. » (1)

Si cette définition est incorrecte, le reste de la question ne sera pas corrigé.

- Parmi les propriétés suivantes, cochez celles qui sont vraies.

(a) Vrai : Faux : 5 est la racine carrée de 25 ;

(b) Vrai : Faux : -5 est la racine carrée de 25 ;

(c) Vrai : Faux : 5 et -5 sont les racines carrées de 25.

Prouvez ci-dessous les propriétés que vous avez cochées comme vraies à partir (uniquement) de la définition (1).

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : La droite $D_1 \equiv -3x + 4y = 10$ est parallèle à la droite D_2 passant par les points $(1, \frac{1}{2})$ et $(3, -1)$.

(b) Vrai : Faux : Quel que soit le réel λ , le système $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x - \lambda y = -\lambda \end{cases}$, où x et y sont les inconnues a toujours au moins une solution.

(c) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv 6x + 9y = 5$ et $D_2 \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+8}{2}$ sont perpendiculaires.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4.

/6

(a) Soit $f : A \rightarrow B$, donnez la définition de f est injective.

(b) Soit $f : A \rightarrow B$, donnez la définition de f est surjective.

(c) Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

(i) Vrai : Faux : $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_1(x) = 2x$ est injective mais pas surjective.

(ii) Vrai : Faux : $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = 3x + 1$ est injective et surjective.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Soit le système

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3\lambda x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

/4

Nombres complexes

Test n° 1 (16 octobre 2023)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 1. Soit p et q deux nombres réels, $\Delta = q^2/4 + p^3/27$ et supposons que $\Delta \geq 0$. Prouver que

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{avec} \quad r_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$.

/3