Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 5 (16 octobre 2023) **Correction**

Question 1. *Donnez en extension l'ensemble ci-dessous. Justifier votre réponse.*

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leqslant 10 \wedge (a \textit{ est pair } \Rightarrow\ a+1 \textit{ est un multiple de } 5)\}$$

Un élément $a \in \mathbb{N}$ appartient à l'ensemble A si et seulement si il satisfait la formule ci-dessous

$$\varphi(a) \quad \equiv \quad a \leqslant 10 \wedge (a \text{ est pair } \Rightarrow\ a+1 \text{ est un multiple de } 5).$$

Au vu de la première partie de la conjonction, les seuls naturels à considérer sont $0, 1, \ldots, 10$.
La seconde partie de la conjonction est une implication. Elle doit donc également être satisfaite. Elle est satisfaite dans les deux situations suivantes :

(a) Si la prémisse est fausse, i.e. si a est impair.

(b) Si la prémisse est vraie, ainsi que la conclusion, ce qui n'arrive quand quand $a = 4$.

En conclusion, on a donc :

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Question 2.

- *Complétez la définition suivante : « Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que b est la racine carrée de a si*

  $\boxed{b^2 = a \text{ et } b \geqslant 0}$. » (1)

  Si cette définition est incorrecte, le reste de la question ne sera pas corrigé.

- *Parmi les propriétés suivantes, cochez celles qui sont vraies.*

  (a) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *5 est la racine carrée de 25 ;*

  (b) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *-5 est la racine carrée de 25 ;*

  (c) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *5 et -5 sont les racines carrées de 25.*

  Prouvez ci-dessous les propriétés que vous avez cochées comme vraies à partir (uniquement) de la définition (1).

Pour montrer (a) , il faut vérifier que (1) est vrai pour $a = 25$ et $b = 5$. On a bien que $b^2 = 5^2 = 25 = a$ et $b = 5 \geqslant 0$.

Question 3. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *La droite* $D_1 \equiv -3x+4y=10$ *est parallèle à la droite* D_2 *passant par les points* $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ *et* $(3,-1)$.

On a $-3x+4y=10 \Leftrightarrow y=\frac{3x}{4}+\frac{5}{2}$. Donc la pente de D_1 vaut $\frac{3}{4}$.

La pente de D_2 vaut $\frac{-1-\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{3}{4}$.

Les pentes étant différentes, les deux droites ne sont pas parallèles. Donc c'est faux.

(b) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Quel que soit le réel* λ, *le système* $\begin{cases}\lambda x+y=\lambda \\ x-\lambda y=-\lambda\end{cases}$, *où* x *et* y *sont les inconnues a toujours au moins une solution.*

Calculons le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2-1=-(\lambda^2+1).$$

Celui-ci est toujours différent de zéro car quel que soit le réel λ, on a $\lambda^2 \neq -1$ puisque $\lambda^2 \geqslant 0$.

On a vu au cours que, dans ce cas, le système a une unique solution. Donc l'affirmation est vraie.

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Les droites* $D_1 \equiv 6x+9y=5$ *et* $D_2 \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y+8}{2}$ *sont perpendiculaires.*

L'équation de D_1 s'écrit $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}$. Donc la pente de D_1 vaut $m_1=-\frac{2}{3}$.

L'équation de D_2 s'écrit $2x-6=3y+24$, c'est-à-dire $2x-3y=30$ ou encore $y=\frac{2}{3}x-10$. Donc la pente de D_2 vaut $m_2=\frac{2}{3}$. Nous savons que le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut -1. Or $m_1 \cdot m_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}\neq -1$. Donc l'affirmation est fausse.

Question 4.

(a) *Soit* $f : A \to B$, *donnez la définition de* f *est injective.*

$f : A \to B$ est injective si et seulement si $\forall a_1 \in A\ \forall a_2 \in A \quad f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$.

(b) *Soit* $f : A \to B$, *donnez la définition de* f *est surjective.*

$f : A \to B$ est surjective si et seulement si $\forall b \in B\ \exists a \in A \quad f(a)=b$.

(c) *Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.*
Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

(i) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *définie par* $f_1(x)=2x$ *est injective mais pas surjective.*

(ii) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_2(x) = 3x + 1$ *est injective et surjective.*

(i) On montre d'abord que f_1 est injective.
Soient $a_1 \in \mathbb{N}$ et $a_2 \in \mathbb{N}$.
$f_1(a_1) = f_1(a_2)$ est équivalent à $2a_1 = 2a_2$, ce qui implique $a_1 = a_2$.
On montre ensuite que f_1 n'est pas surjective. Pour ce faire, on doit montrer que la négation de la définition est vraie. f_1 n'est pas surjective ssi $\exists b \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{N} \quad f_1(a) \neq b$.
On choisit $b = 1 \in \mathbb{N}$.
On doit montrer que quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a que $f_1(a) \neq 1$.
On constate que $f_1(a) = 1$ si et seulement si $2a = 1$ si et seulement si $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. On a donc bien que $f_1(a) \neq 1$, quel que soit $a \in \mathbb{N}$.

(ii) On montre d'abord que f_2 est injective.
Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et $a_2 \in \mathbb{R}$.
$f_2(a_1) = f_2(a_2)$ est équivalent à $3a_1 + 1 = 3a_2 + 1$, ce qui implique $a_1 = a_2$.
On montre ensuite que f_2 est surjective.
Soit $b \in \mathbb{R}$. On choisit $a = \frac{b-1}{3} \in \mathbb{R}$, car $b \in \mathbb{R}$.
Il reste à vérifier que $f_2(b) = a$, c'est à dire que $3\frac{b-1}{3} + 1 = b$, ce qui est satisfait.

Question 5. *Soit le système*

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3\lambda x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.
Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Si $\lambda = 0$, le système se réduit à l'équation $-2x + 3y = 5$, c'est à dire $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\alpha, \frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{3}\right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Géométriquement S est la droite d'équation $-2x + 3y = 5$.
Si $\lambda = 1$, le système ci-dessus s'écrit

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5, & (2) \\ \quad 3x - y = 0. & (3) \end{cases}$$

De (3), on a $y = 3x$. En remplaçant dans (2), on a $-2x + 9x = 5$, c'est à dire $x = \frac{5}{7}$. Donc, grâce à (3), on a $y = \frac{15}{7}$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right) \right\}$. Géométriquement, on a deux droites qui se coupent au point $\left(\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right)$.