Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (23 octobre 2023) **Correction**

Question 1.

(a) Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$. Complétez les définitions suivantes :

$$\sqrt{u} = v \;\Leftrightarrow\; \boxed{u = v^2 \text{ et } v \geqslant 0,} \tag{1}$$

$$|w| = \boxed{\begin{cases} w & \text{si } w \geqslant 0, \\ -w & \text{si } w < 0. \end{cases}} \tag{2}$$

(b) À partir des définitions (1) *et* (2)*, prouvez que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$. Veillez à la qualité de votre rédaction. En particulier, l'utilisation de* (1) *et* (2) *doit être explicite et détaillée.*

Au vu de (1), montrer $\sqrt{x^2} = |x|$ revient à établir que $x^2 = |x|^2$ et $|x| \geqslant 0$. Montrons ceci en distinguant deux cas selon la définition (2).

(i) Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$. Ce qu'il faut montrer devient $x^2 = x^2$ et $x \geqslant 0$. C'est évidemment vrai puisqu'on est dans le cas $x \geqslant 0$.

(ii) Si $x < 0$, alors $|x| = -x$. Ce qu'il faut montrer devient $x^2 = (-x)^2$ et $-x \geqslant 0$. La première partie est vraie car $(-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2$. La seconde est équivalente à $x \leqslant 0$, après multiplication par -1, ce qui est vrai puisqu'on est dans le cas $x < 0$.

Question 2. *Prouvez, **par induction**, que l'affirmation suivante est vraie.*

Quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.

On commence par traduire l'affirmation en une formule logique. Il nous est demandé de prouver la formule suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} \quad n^2 + 3n = 2k}_{P(n)}.$$

(a) **Cas de base.** On prouve que $P(0)$ est vraie.

Pour cela, on doit montrer que $0^2 + 3 \cdot 0 = 0$ est pair.

Ce qui est démontré en choisissant $k = 0 \in \mathbb{Z}$, vu que $0 = 2 \cdot 0$.

(b) **Cas général.** On doit prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que n^2+3n est pair, ou encore que la formule ci-dessous est vraie

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n^2+3n = 2k. \tag{3}$$

On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(n+1)^2+3(n+1)$ est pair, ou encore que la formule ci-dessous est vraie.

$$\exists l \in \mathbb{Z} \quad (n+1)^2+3(n+1) = 2l. \tag{4}$$

On part du membre de gauche de l'équation (4).

$$\begin{aligned}(n+1)^2+3(n+1) &= n^2+2n+1+3n+3 \\ &= n^2+3n+2n+4 \\ &= 2k+2(n+2) && \text{par hypothèse d'induction (3)} \\ &= 2(k+n+2)\end{aligned}$$

On choisit $l = k+n+2 \in \mathbb{Z}$, car $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc bien que $(n+1)^2+3(n+1) = 2l$ et donc que $(n+1)^2+3(n+1)$ est pair.

(c) **Conclusion.** On vient donc bien de prouver que quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}$, n^2+3n est pair.

Question 3. *Soient les plans $\alpha \equiv 3x-z-2 = 5y-7x$ et $\beta \equiv y = z$.*

(a) Donnez un point appartenant au plan β.

$(0,1,1)$ est un point appartenant au plan β. En effet, $\beta \equiv 0x+y-z = 0$ et si on remplace x par 0, y par 1 et z par 1, celle-ci est vérifiée : $0+1-1 = 0$.

(b) Donnez un point appartenant au plan α.

On a $\alpha \equiv 10x-5y-z = 2$. Le point $(0,0,-2)$ appartient au plan par un raisonnement analogue au point (a).

(c) Donnez un vecteur normal du plan α.

On sait que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un vecteur normal du plan d'équation $ax+by+cz = d$. Donc ici, comme $\alpha \equiv 10x-5y-z = 2$, le vecteur $(10,-5,-1)$ est un vecteur de normal du plan α.

(d) *Donnez une équation cartésienne du plan γ passant par le point $(-1,2,-3)$ et parallèle au plan β.*

On a $\beta \equiv y-z=0$. Donc, $(0,1,-1)$ est un vecteur normal de β. Comme γ est parallèle à β, $(0,1,-1)$ sera aussi un vecteur normal de γ. Donc $\gamma \equiv y-z=d$. Comme $(-1,2,-3) \in \gamma$, on trouve d en remplaçant x par -1, y par 2 et z par -3 dans l'équation $y-z=d$, c'est-à-dire $0\cdot(-1)+2-(-3)=d$, c'est-à-dire $d=5$. Donc $\gamma \equiv y-z=5$.

Question 4. *Prouvez, **à l'aide d'une preuve par contraposée**, que l'affirmation suivante est vraie.*

Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a^3 est pair, alors a est pair.

L'affirmation à prouver se traduit en une formule de la forme $\forall a \in \mathbb{Z} \quad P(a) \Rightarrow Q(a)$.
Vu qu'il nous est demandé d'utiliser une preuve par contraposée, nous allons en fait prouver que la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \neg Q(a) \Rightarrow \neg P(a)$ est vraie. Nous devons donc désormais prouver l'affirmation ci-dessous.

Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a est impair, alors a^3 est impair.

En traduisant cette affirmation par une formule, nous obtenons :

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ a=2k+1 \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}\ a^3=2l+1.$$

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On suppose que la formule $\exists k \in \mathbb{Z}\ a=2k+1$ est vraie.
On doit montrer que la formule $\exists l \in \mathbb{Z}\ a^3=2l+1$ est vraie.
Vu que $a=2k+1$, on a que

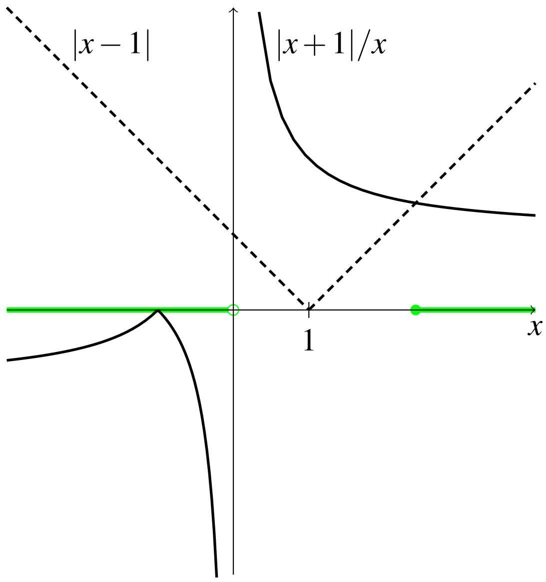
$$a^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2(4k^3+6k^2+3k)+1.$$

On pose $l=4k^3+6k^2+3k \in \mathbb{Z}$, car $k \in \mathbb{Z}$. On a bien que $a^3=2l+1$.

Question 5. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\frac{|x+1|}{x} \leqslant |x-1|. \tag{5}$$

Expliquez comment vous pouvez utiliser le graphique ci-dessous, qui donne les graphes des deux membres de l'inégalité en fonction de x, pour vérifier votre réponse. Veillez à la qualité de vos explications.



Conditions d'existence : Comme x est au dénominateur, il faut que $x \neq 0$. Résolvons maintenant (5). Pour enlever les valeurs absolues ainsi que multiplier par le dénominateur x, nous avons besoin de connaître le signe des expressions $x+1$, x et $x-1$. Ceux-ci sont donnés par le tableau suivant.

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Au vu de celui-ci, nous allons distinguer trois cas.

(a) Si $x < 0$, alors le membre de gauche de (5) est négatif (puisqu'il s'agit du quotient de $|x+1| \geqslant 0$ par $x \leqslant 0$) et il est donc forcément plus petit où égal au membre de droite qui est positif. Tous les $x < 0$ sont donc solution[1] de (5).

(b) Si $x \in \,]0,1[$, alors (5) devient

$$\frac{x+1}{x} \leqslant -x+1,$$

ou encore, vu que $x > 0$, $x+1 \leqslant x(-x+1)$. En regroupant les expressions à gauche, ceci est équivalent à $x^2+1 \leqslant 0$. Cette inéquation n'est satisfaite par aucun x car $x^2 \geqslant 0$ et donc $x^2+1 \geqslant 1 > 0$.

(c) Si $x \geqslant 1$, (5) devient $\frac{x+1}{x} \leqslant x-1$ ou encore $x^2-2x-1 \geqslant 0$. Les racines de ce polynôme sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Vu que le cœfficient de x^2 est positif, le tableau de signe est le suivant :

x		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Les solutions de $x^2-2x-1 \geqslant 0$ sont donc les $x \in \,]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$. Cependant les solutions ne sont solutions de (5) que pour les $x \geqslant 1$. Les solutions trouvées pour ce cas sont donc

[1] Il est bien entendu alternativement possible d'enlever les valeurs absolues en distinguant $x < -1$ et $x \in [-1,0[$ et de déterminer le signe des deux polynômes du second degré qui résultent.

$x \in \big(]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[\big) \cap [1, +\infty[= [1+\sqrt{2}, +\infty[$. En conclusion, en rassemblant les solutions trouvées dans chacun des trois cas ci-dessus, on a

$$(5) \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup \varnothing \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[=]-\infty, 0[\cup [1+\sqrt{2}, +\infty[.$$

Pour vérifier cette solution graphiquement, on doit commencer par repérer quel graphe correspond à quel membre. Le graphe en tirets est clairement celui d'une valeur absolue translatée, c'est donc celui de $|x-1|$. On voit que la racine de cette fonction est $x = 1$, ce qu'on a reporté sur le graphique. Le graphe en trait plein est donc celui du membre de gauche. Pour que (5) soit satisfaite, il faut que le graphe en trait plein soit en dessous de celui en tirets. C'est clairement le cas pour $x < 0$. Parmi les $x > 0$, c'est uniquement vrai à partir du croisement des deux courbes : Les solutions positives sont donc de la forme $[x^*, +\infty[$ avec $x^* > 1$. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment (le calcul montre que $x^* = 1+\sqrt{2}$).