Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (30 octobre 2023) **Correction**

Question 1. *Prouvez,* ***par l'absurde****, que la formule suivante est vraie.*

$$\varphi \equiv \forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a \in \mathbb{Q} \land b \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (a+b \notin \mathbb{Q}).$$

Par l'absurde, on suppose que $\neg\varphi$ est vraie.

$$\neg\varphi \equiv \exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a \in \mathbb{Q} \land b \notin \mathbb{Q}) \land (a+b \in \mathbb{Q}).$$

Vu que $a \in \mathbb{Q}$, il existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ et $d_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que $a = \frac{n_1}{d_1}$.
Vu que $a+b \in \mathbb{Q}$, il existe $n_2 \in \mathbb{Z}$ et $d_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que $a+b = \frac{n_2}{d_2}$.
On a que $b = (a+b) - a = \frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 d_1 - n_1 d_2}{d_1 d_2}$. On a que $n_2 d_1 - n_1 d_2 \in \mathbb{Z}$, vu que $n_1,\ n_2,\ d_1,\ d_2 \in \mathbb{Z}$ et $d_1 d_2 \in \mathbb{N}_0$, vu que $d_1,\ d_2 \in \mathbb{N}_0$.
Donc $b \in \mathbb{Q}$. On a donc une contradiction avec l'hypothèse qui affirme que $b \notin \mathbb{Q}$.
On peut donc conclure que φ est vraie.

Question 2. *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$.*

Notons (a,b,c) un vecteur directeur de la droite D. Comme (a,b,c) est simultanément orthogonal à $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$, le produit scalaire de (a,b,c) avec ces deux vecteurs est nul. On est donc ramené à chercher une solution du système :

$$\begin{cases} 4a + 5b + 6c = 0, & (1) \\ -3a - b = 0. & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) dit $b = -3a$. En remplaçant dans (1), on a $4a - 15a + 6c = 0$, c'est-à-dire $6c = 11a$ ou encore $c = \frac{11}{6}a$. En prenant $a = 6$, on a $b = -18$ et $c = 11$. Le vecteur $(6,-18,11)$ est donc un vecteur directeur de D. On sait aussi que $(2,-1,9) \in D$. Donc un système d'équations cartésiennes de D est

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-18} = \frac{z-9}{11}.$$

Ce système peut par exemple s'écrire

$$\begin{cases} -18x + 39 = 6y + 6, \\ 11y + 11 = -18z + 162, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -18x - 6y = -33, \\ 11y + 18z = 151. \end{cases}$$

Question 3.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, complétez l'égalité qui définit le triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

(b) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.
Si l'égalité ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

On prouve cette formule par induction sur n.

(i) **Cas de base.** On doit prouver $P(1)$.

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1.$$

(ii) **Cas général.** On doit prouver que $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}_0$.
On suppose que $P(n)$ est vraie.
On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

C'est en effet le cas grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} && \text{Définition du triangle de Pascal.} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \binom{n}{-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \binom{n}{-1} + \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} && \text{En posant } k' = k-1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + 0 + 0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} && \text{Par convention} \\
&= 2^n + 2^n && \text{Par hypothèse d'induction} \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Question 4. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\sqrt{x+2}+1 \leqslant \sqrt{2x+2}. \tag{3}$$

Veillez à justifier les différentes étapes de vos calculs.

Conditions d'existence : comme les arguments des racines carrées doivent être positifs pour qu'elles existent, les conditions pour que (3) ait un sens sont :

$$x+2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2x+2 \geqslant 0$$

Ceci est équivalent à « $x \geqslant -2$ et $x \geqslant -1$ », ce qui se réduit à $x \geqslant -1$ ou encore $x \in [-1,+\infty[$.
Comme les deux membres de (3) sont positifs, on peut les élever au carré en gardant une inéquation équivalente :

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = 2x+2.$$

Après développement du carré et regroupement des termes, ceci se réduit à

$$2\sqrt{x+2} \leqslant x-1. \tag{4}$$

Distinguons deux cas selon le signe du membre de droite.

(a) Si $x-1<0$, c'est-à-dire si $x<1$, alors (4) n'a pas de solution puisque le membre de gauche, qui est positif, ne peut jamais être plus petit ou égal à un nombre strictement négatif.

(b) Si $x-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant 1$, alors les deux membres de (4) sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en les élevant au carré : $4(x+2) \leqslant (x-1)^2$. Après développement du carré et regroupement des termes, ceci est équivalent à $x^2-6x-7 \geqslant 0$. Les racines de x^2-6x-7 étant -1 et 7 et le coefficient de x^2 (à savoir 1) étant positif le tableau de signe est :

x		-1		7	
x^2-6x-7	$+$	0	$-$	0	$+$

Dès lors, ce polynôme est positif si $x \in \,]-\infty,-1] \cup [7,+\infty[$. Ces solutions ne sont des solutions de (3) que si elles satisfont la condition du cas actuellement discuté, à savoir $x \geqslant 1$. Par conséquent, les solutions de (3) ici trouvées sont :

$$x \in \big(]-\infty,-1] \cup [7,+\infty[\big) \cap [1,+\infty[\,=\, [7,+\infty[.$$

Notons que ces solutions vérifient bien les conditions d'existence.

En conclusion, en rassemblant les solutions trouvées dans chacun des cas, on obtient :

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing \cup [7,+\infty[\,=\, [7,+\infty[.$$

Question 5.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donnez la définition de f est strictement croissante.

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

(b) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.
Si la définition ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Quel que soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux applications, si f et g sont strictement croissantes, alors $f \circ g$ est injective.*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g sont strictement croissantes :

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b), \tag{5}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad a < b \Rightarrow g(a) < g(b). \tag{6}$$

On doit montrer que $f \circ g$ est injective, c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad a \neq b \Rightarrow f \circ g(a) \neq f \circ g(b).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. On a donc que $a < b$ ou $b < a$. On suppose que $a < b$ (si $b < a$, on peut tenir un raisonnement identique).
Vu que $a < b$, par (6), on sait que $g(a) < g(b)$.
Vu que $g(a) < g(b)$, par (5), on sait que $f \circ g(a) < f \circ g(b)$. Et donc en particulier, $f \circ g(a) \neq f \circ g(b)$.

Question 6. *Soient les droites $D_1 \equiv \lambda x + 2y = 4$ et $D_2 \equiv \lambda x + (\lambda + 1)y = \lambda + 3$ où λ est un paramètre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Pour la ou les valeur(s) trouvées, donnez l'ensemble qui décrit l'intersection des deux droites. Expliquez votre démarche.*

Étudier l'intersection de D_1 et D_2 revient à chercher les couples (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations, donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 4, \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = \lambda + 3. \end{cases}$$

Les droites D_1 et D_2 seront sécantes si et seulement si ce système possède une unique solution, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant du système est non nul. Or ce déterminant vaut :

$$\lambda(\lambda + 1) - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

Il s'annule lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Donc D_1 et D_2 seront sécantes si et seulement $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. L'unique solution du système, notée (α, β), est donnée par les formules de Cramer :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \lambda+3 & \lambda+1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{4\lambda+4-2\lambda-6}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{2\lambda-2}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{2}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^2+3\lambda-4\lambda}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^2-\lambda}{\lambda(\lambda-1)} = 1.$$

En conclusion, l'ensemble qui décrit l'intersection de D_1 et D_2 est $\left\{(\frac{2}{\lambda}, 1)\right\}$.