

Déterminants

Mathématique Élémentaire

Question 1. Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez C_{13} , C_{23} , C_{22} et C_{21} .

Question 2. Calculez le déterminant des matrices suivantes par la méthode des cofacteurs.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculez l'inverse de A en utilisant la méthode de la matrice compagnon.
- Calculez l'inverse de A par la méthode de la matrice adjointe.
- Quelle méthode exige le moins de calculs ?

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 6 \\ 3x + 7y - z + w = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w = -3 \\ x + y + z + 2w = 3 \end{cases}$$

- Résolvez ce système en utilisant la méthode de Cramer.
- Résolvez ce système en utilisant la méthode de Gauss.
- Quelle méthode exige le moins de calculs ?

Question 5. Montrez que si A est une matrice triangulaire inférieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure.

Question 6. Dans chacun des énoncés ci-dessous, A désigne une matrice carrée. Dites si ces énoncés sont vrais ou faux. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

- La matrice $A \operatorname{adj} A$ est une matrice diagonale.
- La méthode de Cramer permet de résoudre tous les systèmes de n équations linéaires à n inconnues.

Déterminants

Mathématique Élémentaire

- Si A est inversible, alors $\text{adj } A$ est aussi inversible.
- Si A contient une ligne de zéros, alors $\text{adj } A$ contient également une ligne de zéros.

Question 7. Donnez la valeur des déterminants suivants par un simple examen visuel. Expliquez votre réponse.

$$\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Question 8. Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, déduisez-en la valeur des déterminants suivants.

Expliquez votre réponse.

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$$