Mathématique Élémentaire
Introduction à l'algèbre linéaire
Support au cours

S. Bridoux

Université de Mons-Hainaut

Plan (1/2)

1. L'espace $\mathbb{R}^N$
   - Vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et opérations
   - Produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$
   - Norme d'un vecteur
2. Droites et plans
   - Droites de $\mathbb{R}^2$
   - Droites de $\mathbb{R}^3$
   - Plans de $\mathbb{R}^3$
   - Quelques systèmes
3. Calcul matriciel
   - Matrices de type $n \times p$
   - Matrices particulières
   - Opérations sur les matrices

Plan (2/2)

4. Systèmes de n équations linéaires à p inconnues
   - Notations
   - Matrices échelonnées
   - Transformations élémentaires
   - Méthode de Gauss
   - Inverse d'une matrice
5. Déterminants
   - Méthode des cofacteurs
   - Propriétés des déterminants

1. L'espace $\mathbb{R}^N$
   - Vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et opérations
   - Produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$
   - Norme d'un vecteur
2. Droites et plans
3. Calcul matriciel
4. Systèmes de n équations linéaires à p inconnues
5. Déterminants

Vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et opérations

Notre cadre de travail : $\mathbb{R}^N$ où $N \geqslant 1$

$\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\}$

Définition

On dit que x est un **vecteur** de $\mathbb{R}^N$ et on note $x \in \mathbb{R}^N$ ssi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ pour certains $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$.

Définition

Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{R}$. Posons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Alors,

- $x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N)$
- $kx := (kx_1, kx_2, \ldots, kx_N)$

Opérations sur les vecteurs de $\mathbb{R}^N$

Propriétés des opérations

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x + 0 = x = 0 + x$
4. $x + (-x) = 0$
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Produit scalaire

Définition

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$. Le **produit scalaire** de x et y, noté $(x|y)$, est défini par $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N$.

Propriétés

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $(x|y) \in \mathbb{R}$
2. $(x|y) = (y|x)$
3. $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$
4. $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$
5. $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$
6. $(x|x) \geqslant 0$

Produit scalaire — orthogonalité

Définition

Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$. On dit que x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, cette notion coïncide avec la notion de perpendicularité.

Norme d'un vecteur

Définition

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$. La **norme** de x, notée $\|x\|$, est définie par $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_N^2}$.

Propriétés

Soient $x \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\|x\| \in \mathbb{R}^+$
2. $(x|x) = \|x\|^2$
3. $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Droites de $\mathbb{R}^2$

Équation paramétrique d'une droite D de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (x_0, y_0) et dont un vecteur directeur est (x_1, y_1) :

$$D \equiv (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_1, y_1), \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

Équation cartésienne d'une droite D de $\mathbb{R}^2$:

$$D \equiv ax + by = c,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$.
Le vecteur (a, b) est un vecteur normal de la droite D.
Si $b \neq 0$, la pente de D vaut $-a/b$.

Droites de $\mathbb{R}^3$

Équation paramétrique d'une droite D de $\mathbb{R}^3$ passant par (x_0, y_0, z_0) et dont un vecteur directeur est (x_1, y_1, z_1) :

$$D \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1, y_1, z_1), \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

Système d'**équations cartésiennes** d'une droite D de $\mathbb{R}^3$:

$$D \equiv \frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

où $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ et $z_1 \neq 0$. (Cas particuliers $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ou $z_1 = 0$ traités en exercices.)

Plans de $\mathbb{R}^3$

Équation paramétrique d'un plan α de $\mathbb{R}^3$ passant par (x_0, y_0, z_0) et dont deux vecteurs directeurs sont (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) :

$$\alpha \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2), \quad \text{pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Équation cartésienne d'un plan α de $\mathbb{R}^3$:

$$ax + by + cz = d$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Le vecteur (a, b, c) est un vecteur normal du plan α.

Quelques systèmes

Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues
Forme générale :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Le nombre $ab' - a'b$ est le **déterminant** du système.

Systèmes de 2 équations linéaires à 3 inconnues
Forme générale :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Matrices de type $n \times p$

Définition

Une **matrice** A de type $n \times p$ est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$
a_{ij} est l'élément situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne.

Matrices particulières

- Matrices de type $n \times n$ ou **matrices carrées** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrices triangulaires supérieures et inférieures :**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

- **Matrices diagonales :**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrices de type $1 \times n$ ou **matrices lignes** : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$
- Matrices de type $n \times 1$ ou **matrices colonnes** :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s}$.

Les matrices A et B sont **égales** ssi elles sont de même type et si leurs leurs éléments correspondants sont égaux.

Égalité de deux matrices

$A = B$ ssi ($n = r$ et $p = s$) et $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p,\ a_{ij} = b_{ij}$

La **somme** des matrices A et B s'obtient en additionnant les éléments correspondants de A et B.

Addition de deux matrices

La matrice $C = A + B$ est définie par
$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Opérations sur les matrices

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de type $n \times p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

La **multiplication** de A par un **scalaire** λ s'obtient en multipliant tous les éléments de la matrice A par λ.

Multiplication par un scalaire

La matrice $B = \lambda A$ est définie par $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p,\ b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

Opérations sur les matrices

Le **produit** de deux matrices A et B s'obtient « en multipliant les lignes de A par les colonnes de B ».
Si A est de type $n \times p$, alors B doit être de type $p \times r$ pour que le produit AB soit défini.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pr} \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

La matrice $C = AB$ est définie par

$$\forall i = 1, \dots, n, \ \forall j = 1, \dots, p, \ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Opérations sur les matrices

Remarques :

- Le produit matriciel n'est *pas* commutatif
- Le produit matriciel n'est *pas* simplifiable, çàd $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Opérations sur les matrices

Propriétés

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Opérations sur les matrices

Soit A une matrice de type $n \times p$. La transposée de A, notée A^t, s'obtient en interchangeant les lignes et les colonnes de A. Ainsi, la première ligne de A devient la première colonne de A^t,...
Si A est de type $n \times p$, alors A^t est de type $p \times n$.

Définition

La **transposée** de A est la matrice $A^t = (a'_{ij})$ définie par $a'_{ij} = a_{ji}$.

Propriétés

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

Notations

Système de n équations linéaires à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Écriture abrégée : $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $x \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ et $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Notations

Matrice augmentée du système :

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

Matrices échelonnées — introduction

Résolvez les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 3z = 11 \\ z = 3 \end{cases}$$

Que constatez-vous ? Lequel des deux systèmes est le plus simple à résoudre ?

Idée : Pour résoudre un système de n équations linéaires à p inconnues, on remplace le système donné par un nouveau système dont l'ensemble des solutions est le même que le système initial mais qui est plus simple à résoudre.

Matrices échelonnées

Définition

Une **matrice échelonnée** est une matrice qui possède les caractéristiques suivantes :

- Si une ligne ne contient pas que des zéros, alors le premier élément non nul de cette ligne, appelé pivot, est 1.
- Les lignes qui ne contiennent que des zéros sont groupées au bas de la matrice.
- Dans chaque ligne, le premier élément non nul est situé à droite du premier élément non nul de la ligne précédente.

Matrices échelonnées

Méthode de Gauss

Toute matrice peut être transformée par des opérations élémentaires en une matrice échelonnée.

Théorème

Si on transforme la matrice augmentée $[A|b]$ d'un système $Ax = b$ en une matrice échelonnée $[A^*|b^*]$, on obtient les équations d'un nouveau système $A^*x = b^*$ qui possède le même ensemble de solutions que le système initial.

Transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice

- Permuter les lignes L_i et L_j.
  Notation : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplier tous les éléments de la ligne L_i par un réel α non nul.
  Notation : $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Ajouter à la ligne L_i un multiple non nul de la ligne L_j.
  Notation : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Méthode de Gauss

Ignorer les éventuelles premières colonnes de zéros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Faire apparaître un élément non nul sur la 1^{re} ligne de la 1^{re} colonne non nulle en permutant les lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Méthode de Gauss

Diviser la 1re ligne par son premier élément non nul.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1/3$$

Ajouter aux autres lignes un multiple convenable de la 1re ligne pour amener des zéros dans la première colonne non nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

Méthode de Gauss

Répéter les opérations 1, 2, 3 et 4 sur les lignes suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2/2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{array}$$

Méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

Inverse d'une matrice

Définition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. L'**inverse** de A est, si elle existe, la matrice notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = \mathbb{1} = A^{-1}A$.

Matrice d'une transformation élémentaire sur les lignes

Appliquer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A revient à calculer TA où la matrice T est l'identité $\mathbb{1}$ dans laquelle on a effectué la même transformation.

Méthode de la matrice compagnon

- A et $\mathbb{1}$ au départ.
- Après la première transformation, nous avons : $A_1 := T_1 A$ et $I_1 := T_1 \mathbb{1}$ où T_1 est la matrice de cette première transformation,
- Après la deuxième transformation, nous avons : $A_2 := T_1 A_1$ et $I_2 := T_2 \mathbb{1}$ où T_2 est la matrice de la transformation 2,
- etc.
- Après la n$^{\text{e}}$ transformation, nous avons : $\mathbb{1} = T_n A_{n-1}$ et $I_n = T_n I_{n-1}$ où T_n est la matrice de la transformation n.

On a $\mathbb{1} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 A$ et $I_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1 \mathbb{1}$. Donc $\mathbb{1} = I_n A$, d'où $A^{-1} = I_n$.

Méthode des cofacteurs

Rappel : soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Méthode des cofacteurs

Mineurs et cofacteurs

Soit A une matrice de type $n \times n$.

- Le **mineur** de l'élément a_{ij}, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A.
- Le **cofacteur** de l'élément a_{ij}, noté C_{ij}, est le nombre $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Définition

Soit A une matrice de type $n \times n$. On a :

- $\text{dét}\, A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$ si on développe suivant la i^{e} ligne de A ;
- $\text{dét}\, A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$ si on développe suivant la j^{e} colonne de A.

Matrice adjointe

Définition

Soit A une matrice de type $n \times n$. La **matrice adjointe** de A, notée $\operatorname{adj} A$, est définie par

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Lien entre déterminant et inversibilité

Soit A une matrice de type $n \times n$.

A est inversible ssi $\text{dét}\, A \neq 0$ et on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét}\, A} \operatorname{adj} A$.

Systèmes de Cramer

Théorème

Soit $Ax = b$ un système de n équations linéaires à n inconnues tel que $\text{dét}\, A \neq 0$. Alors, le système possède une unique solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donnée par

$$x_i = \frac{\text{dét}\, A_i}{\text{dét}\, A} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

où A_i est la matrice A dans laquelle on a remplacé la i^e colonne par les éléments de la matrice b.

Propriétés des déterminants

Théorème

Soit A une matrice carrée. Si A contient une ligne ou une colonne de zéros, alors $\text{dét}\, A = 0$.

Théorème

Soit A une matrice carrée. Alors, $\text{dét}\, A = \text{dét}\, A^t$.

Propriétés des déterminants

Théorème

Soit A une matrice carrée.

1. Si B est la matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de A par un réel k, alors $\text{dét}\, B = k\, \text{dét}\, A$.
2. Si B est la matrice obtenue en permutant deux lignes ou deux colonnes de A entre elles, alors $\text{dét}\, B = -\text{dét}\, A$.
3. Si B est la matrice obtenue en ajoutant à une ligne de A un multiple d'une autre ligne ou en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne, alors $\text{dét}\, B = \text{dét}\, A$.

Théorème

Soit A une matrice carrée contenant deux lignes proportionnelles ou deux colonnes proportionnelles. Alors $\text{dét}\, A = 0$