Systèmes de n équations linéaires à p inconnues

Mathématique Élémentaire

Question 1. Associez un système d'équations linéaires à chaque matrice augmentée donnée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 2. Soit le système suivant, noté S, de 3 équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

- Définissez « $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ est une solution du système S ».
- Soit $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ une solution du système S. Considérons le système S' qui est le système S dans lequel on a effectué la transformation suivante : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. Montrez que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ est aussi une solution du système S'. Détaillez vos calculs.

Question 3. Dites si les matrices suivantes sont échelonnées ou pas :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 4. Les matrices suivantes sont les matrices augmentées d'un système d'équations linéaires. Recherchez l'ensemble des solutions de chaque système. Détaillez vos calculs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 5. Résolvez les systèmes suivants :

(a) $$\begin{cases} 10y - 4z + w = 1 \\ x + 4y - z + w = 2 \\ 3x + 2y + z + 2w = 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w = -4 \\ x - 6y + 3z = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} I_3 + I_4 + I_5 = 0 \\ -I_1 - I_2 + 2I_3 - 3I_4 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - 2I_3 - I_5 = 0 \\ 2I_1 + 2I_2 - I_3 + I_5 = 0 \end{cases}$

Question 6. Sans crayon ni papier, dites lesquels des systèmes homogènes suivants ont d'autres solutions que la solution triviale. Expliquez votre choix.

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

Question 7. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Comment peut-on vérifier si B est l'inverse de A ou pas ?

Question 8. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrez que B est l'inverse de A.

Question 9. Soient A une matrice de type $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrez que l'inverse de la matrice λA est la matrice $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Question 10. Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un paramètre réel.

Pour quelle(s) valeur(s) de θ cette matrice est-elle inversible ? Donnez alors la matrice inverse.

Question 11. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels non nuls. Recherchez l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 12. Résolvez les systèmes suivants en utilisant deux méthodes différentes. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

(a) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 = 9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$