Mathématiques Élémentaires

Test n° 1 (23 septembre 2024) **Correction**

Question 1.

(a) *Écrivez dans le cadre ci-dessous la règle de compatibilité de l'ordre avec la multiplication.*

> Quels que soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $z \geqslant 0$, alors $xz \leqslant yz$. (1)

(b) *À partir de la règle énoncée au point (a), prouvez que si $a, b \in \mathbb{R}$ sont des nombres positifs tels que $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons que $a \leqslant b$ et prouvons que $a^2 \leqslant b^2$. Puisque $a \leqslant b$ et $a \geqslant 0$, une première application de (1) montre que $a^2 = aa \leqslant ba$. Par ailleurs, puisque $a \leqslant b$ et $b \geqslant 0$, d'une seconde application de (1) on déduit que $ab \leqslant bb = b^2$. Dès lors on a $a^2 \leqslant ab \leqslant b^2$ et on conclut en utilisant la transitivité.

Question 2.

(a) *Donnez la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.*

(b) *Donnez la définition d'une tautologie.*

(c) *Donnez la réciproque de la formule $Q \Rightarrow P$.*

(d) *Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*
Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *La réciproque de la formule $Q \Rightarrow (P \wedge \neg P)$ est une tautologie.*

(a) La table de vérité de $P \Rightarrow Q$ est donnée par :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(b) Une tautologie est une formule qui est toujours vraie.

(c) La réciproque de la formule $Q \Rightarrow P$ est la formule $P \Rightarrow Q$.

(d) La réciproque de la formule $Q \Rightarrow (P \wedge \neg P)$ est la formule $(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$. Pour montrer que cette formule est une tautologie, nous construisons sa table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Vu que la colonne associée à la formule $(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ ne contient que des 1, cette formule est toujours vraie, c'est donc bien une tautologie.

Question 3.

(a) Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Complétez les égalités suivantes :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$
$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

(b) Soient $u = (-3, 4)$ et $v = (-2, -1)$. Calculez

- $\frac{v}{3} - 2u$

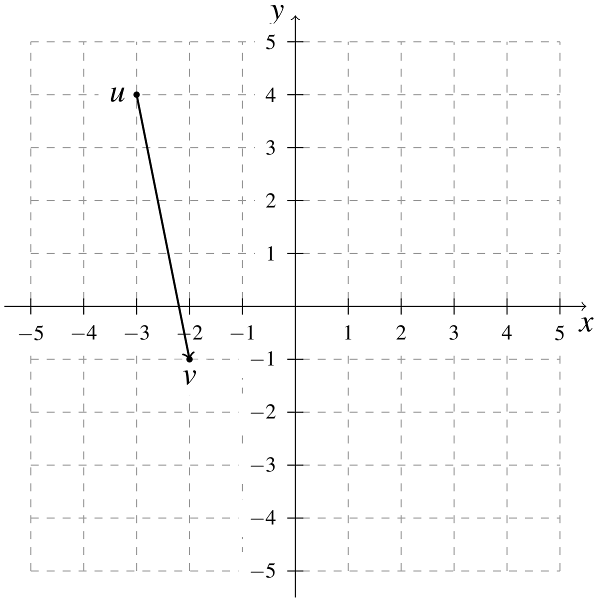
$$\begin{aligned} \frac{v}{3} - 2u &= \frac{1}{3}(-2,-1) - 2(-3,4) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (-6,8) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) + (6,-8) \\ &= \left(-\frac{2}{3} + \frac{18}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{24}{3}\right) \\ &= \left(\frac{16}{3}, -\frac{25}{3}\right) \end{aligned}$$

- *la distance entre u et v :*
  On a vu au cours que c'est la norme de $u - v$ ou de $v - u$. Or $u - v = (-3,4) - (-2,-1) = (-1,5)$. Donc

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(-1,5)\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

- $(u| - v) = ((-3,4)|(2,1)) = -3 \times 2 + 4 \times 1 = -6 + 4 = -2.$

- *Dans le repère ci-dessous, représentez le vecteur w d'origine u et d'extrémité v.*



- *Donnez les composantes du vecteur w en expliquant votre réponse.*
  On a vu au cours que le vecteur d'origine u et d'extrémité v est $v-u$. Donc

$$w = v - u = (-2,-1) - (-3,4) = (1,-5).$$

Question 4.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Rappelez la table de signe du produit ab.

$b \backslash a$	$-$	0	$+$
$-$	$+$	0	$-$
0	0	0	0
$+$	$-$	0	$+$

(b) Donnez toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité $(x-1)(x+2) \leqslant 0$. La qualité de vos explications est importante.

Selon la table de signe, pour qu'un produit soit $\leqslant 0$, il faut qu'un des deux facteurs soit $\leqslant 0$ et l'autre $\geqslant 0$. Il y a donc deux cas à distinguer.

- Premier cas : $x-1 \leqslant 0$ et $x+2 \geqslant 0$. On peut réécrire ça comme $x \leqslant 1$ et $x \geqslant -2$. Au vu de la définition des intervalles, c'est équivalent à $x \in [-2,1]$.

- Second cas : $x-1 \geqslant 0$ et $x+2 \leqslant 0$. Autrement dit $x \geqslant 1$ et $x \leqslant -2$. Aucune valeur de x ne peut vérifier à la fois être supérieure à 1 et inférieure à -2. Ce cas ne donne donc aucune valeur de x qui satisfait l'inégalité.

En conclusion, les valeurs de x qui vérifient $(x-1)(x+2) \leqslant 0$ sont les $x \in [-2, 1]$.

Question 5. *Soit* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Complétez les phrases suivantes :

$$v = 0 \quad \textit{ssi} \quad \boxed{v_1 = 0 \text{ et } v_2 = 0}$$
$$v \neq 0 \quad \textit{ssi} \quad \boxed{v_1 \neq 0 \text{ ou } v_2 \neq 0}$$

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ *le vecteur défini par* $u = (\lambda^2 - 4, 2 - \lambda)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* λ *a-t-on* $u = 0$ *? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Par (a), $u = 0$ ssi $\lambda^2 - 4 = 0$ et $2 - \lambda = 0$. De l'égalité $2 - \lambda = 0$, on déduit que $\lambda = 2$. De l'égalité $\lambda^2 - 4 = 0$, on déduit que $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$. Comme ces deux égalités doivent être vérifiées en même temps, on ne retient que $\lambda = 2$.