Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 2 (30 septembre 2024) **Correction**

Question 1. *Donnez la négation de la phrase ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

Si 12 est un multiple de six, alors 12 est pair ou 12 est un multiple de trois.

La phrase dont on doit donner la négation est de la forme $P \Rightarrow (Q_1 \vee Q_2)$.
On sait que $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ et que $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. En combinant ces deux règles, on a donc

$$\neg(P \Rightarrow (Q_1 \vee Q_2)) \equiv P \wedge \neg(Q_1 \vee Q_2) \equiv P \wedge \neg Q_1 \wedge \neg Q_2.$$

Cette dernière formule se retraduit en français par

12 est un multiple de six et 12 n'est pas pair et 12 n'est pas un multiple de trois.

Question 2. *Soit la droite D passant par les points* $(5,0)$ *et* $(1,-3)$.

(a) Donnez une équation paramétrique de la droite D.

(b) Donnez un vecteur normal de la droite D.

(c) Montrez que le point $\left(\frac{-1}{3}, -4\right)$ *appartient à la droite D.*

Toutes vos réponses doivent être justifiées.

(a) Posons $u = (5,0)$ et $v = (1,-3)$. On a vu au cours que le vecteur d'origine u et d'extrémité v est un vecteur directeur de la droite. Ce vecteur est $v - u$, c'est-à-dire $(1,-3) - (5,0) = (-4,-3)$. Donc comme on connaît un point de D et un vecteur directeur, une équation paramétrique de D est $(x,y) = (5,0) + \lambda(-4,-3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Un vecteur normal de D est orthogonal à un vecteur directeur de D. Prenons par exemple $(3,-4)$. Ce vecteur est orthogonal à $(-4,-3)$ qui est un vecteur directeur de D car

$$\big((-4,-3) \mid (3,-4)\big) = -12 + 12 = 0.$$

Donc $(3,-4)$ est un vecteur normal de D.

(c) Le point $\left(-\frac{1}{3}, -4\right)$ appartient à D si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left(-\frac{1}{3}, -4\right) = (5,0) + \lambda(-4,-3). \tag{1}$$

Les opérations sur les vecteurs permettent d'écrire (1) sous la forme

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left(-\frac{1}{3}, -4\right) = (5 - 4\lambda, -3\lambda).$$

Par l'égalité entre les vecteurs, on cherche donc un réel λ tel que $-\frac{1}{3} = 5 - 4\lambda$ et $-4 = -3\lambda$. Ces deux égalités sont vérifiées lorsque $\lambda = \frac{4}{3}$. En effet $-\frac{1}{3} = 5 - 4 \cdot \frac{4}{3}$ car $-\frac{1}{3} = \frac{15}{3} - \frac{16}{3}$ et $-4 = -3 \cdot \frac{4}{3}$.

Question 3. *Prouvez que les formules suivantes sont vraies.*

(a) $\exists z \in \mathbb{R} \quad \left(z > \frac{1}{2}\right) \wedge (z^2 < z)$.

(b) $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

(c) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2$.

(d) $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall d \in \mathbb{R} \quad (c > 0) \Rightarrow (d = c)$.

(e) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} \quad a + b < 11$.

(a) On choisit $z = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$. La formule est une conjonction, pour qu'elle soit vraie, les deux membres de la conjonction doivent être vrais.

Pour le premier membre, on a $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ qui est équivalent à $\frac{4}{6} > \frac{3}{6}$. Ce qui est vrai.

Pour le second membre, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \frac{2}{3}$, qui est équivalent à $\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$, qui est équivalent à $\frac{4}{9} < \frac{6}{9}$. Ce qui est vrai.

(b) On choisit $a = b = 1 \in \mathbb{R}$.

Il suffit de vérifier que $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$. Ce qui est équivalent à $4 \neq 2$. Ce qui est vrai.

(c) On choisit $x = 0 \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Il suffit de vérifier que $(0+y)^2 = 0^2 + y^2$. Ce qui est équivalent à $y^2 = y^2$. Ce qui est vrai.

(d) On choisit $c = 0 \in \mathbb{R}$. Soit $d \in \mathbb{R}$.

Il suffit de vérifier que $(0 > 0) \Rightarrow (d = 0)$.

Vu que la prémisse de l'implication est fausse, l'implication est vraie, quelle que soit la valeur de d.

(e) Soit $a \in \mathbb{Z}$. On choisit $b = -a \in \mathbb{Z}$, car $a \in \mathbb{Z}$.

Il suffit de vérifier que a + (-a) < 11. Ce qui est équivalent à $0 < 11$. Ce qui est vrai.

Question 4.

(a) *Écrivez dans le cadre ci-dessous la règle de compatibilité de l'ordre avec la multiplication. Veuillez à ce que cette règle soit correctement quantifiée.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leqslant y \wedge z \geqslant 0) \Rightarrow xz \leqslant yz$$

(b) *À partir de la règle énoncée au point (a), prouvez que si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.*

Pour commencer, rappelons que la règle de compatibilité avec l'addition dont nous aurons aussi besoin :

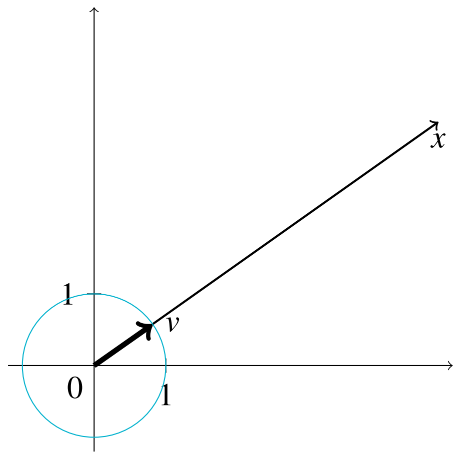
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z. \tag{2}$$

En particulier, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant 0$ alors (en ajoutant $-x$ aux deux membres) $-x \geqslant 0$.

Comme par hypothèse $a \leqslant b$, en utilisant (2) avec $x = a$, $y = b$, $z = -b-a$, on en déduit que $-a \geqslant -b$. De plus, comme $b \leqslant 0$, on a $-b \geqslant 0$. Par la règle de compatibilité avec la multiplication particularisée à $x = -b$, $y = -a$ et $z = -b$, on déduit que $(-b)^2 \leqslant (-a)(-b)$ c'est-à-dire que $b^2 \leqslant ab$. En utilisant de nouveau la règle de compatibilité avec la multiplication cette fois ci particularisée à $x = -b$, $y = -a$ et $z = -a$, on déduit que $(-b)(-a) \leqslant (-a)^2$ c'est-à-dire que $ab \leqslant a^2$. Vu que $b^2 \leqslant ab \leqslant a^2$, la propriété de transitivité de l'ordre implique que $b^2 \leqslant a^2$ qui est ce qu'on voulait montrer.

Question 5. *Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.*

Comme $\|v\| = 1$ (vu au cours) et que $v = x/\|x\|$ a même direction et même sens que x (puisque $\|x\| > 0$), v est le vecteur d'origine $(0,0)$, de même direction et même sens que x et dont l'extrémité est sur le cercle unité.



Question 6. *Soit la droite $D \equiv (x,y) = (-2,1) + \lambda(-5,2)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Recherchez le point d'intersection entre la droite D et l'axe des abscisses. Expliquez votre démarche.*

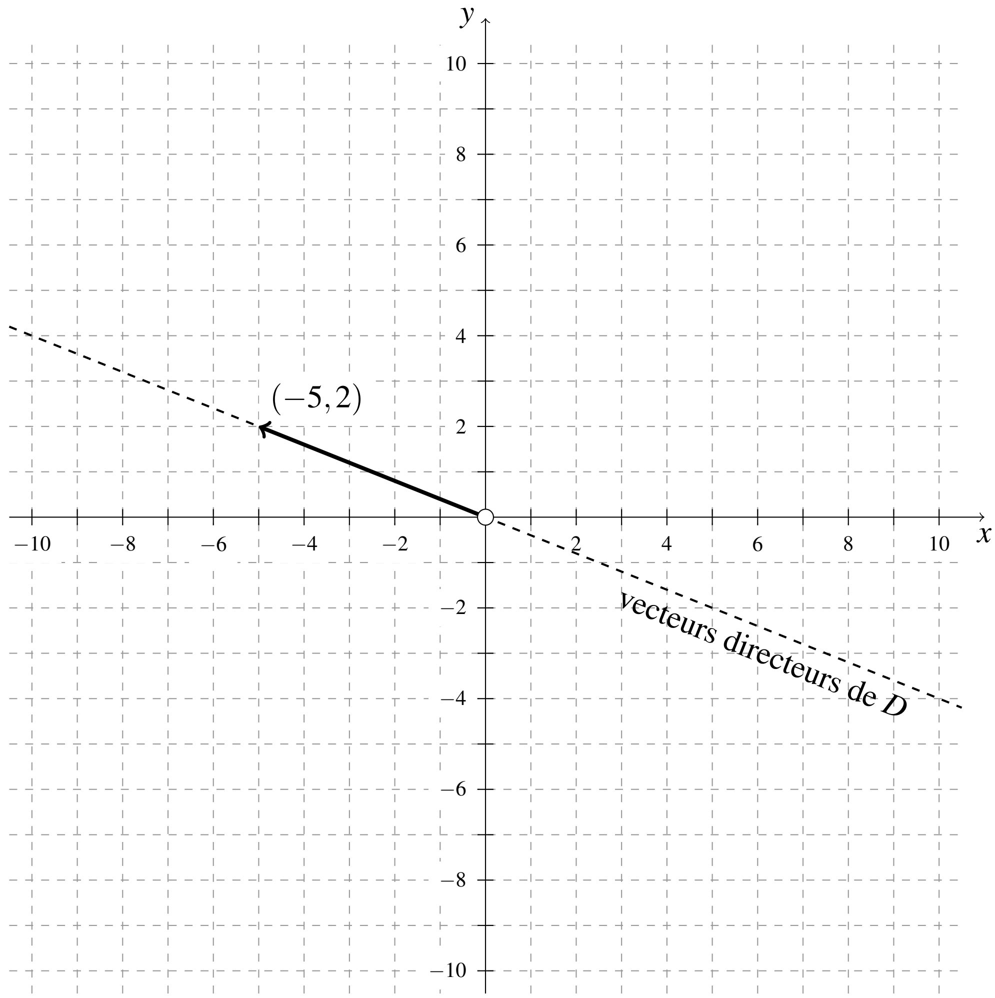
Un point de l'axe des abscisses est de la forme $(\alpha, 0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche donc un réel α tel que $(\alpha, 0) \in D$. Autrement dit, on doit trouver un réel λ tel que

	$(\alpha,0) = (-2,1) + \lambda(-5,2)$	
c'est-à-dire	$(\alpha,0) = (-2-5\lambda, 1+2\lambda)$	par les opérations sur les vecteurs,
c'est-à-dire	$\alpha = -2-5\lambda$ et $0 = 1+2\lambda$,	par l'égalité entre les vecteurs.

La deuxième égalité dit que $\lambda = -1/2$. En remplaçant dans la première égalité, on a $\alpha = -2 + \frac{5}{2}$, c'est-à-dire $\alpha = 1/2$. En conclusion, $(1/2, 0)$ est le point d'intersection entre la droite D et l'axe des abscisses.

Question 6 (suite).

- *Représentez graphiquement dans le repère ci-dessous l'ensemble des vecteurs directeurs de la droite D. Expliquez votre démarche.*



À partir de l'équation donnée pour D, on déduit que $(-5, 2)$ est un vecteur directeur de D. On a vu au cours que tout vecteur de la forme $\lambda(-5, 2)$, où $\lambda \neq 0$ (puisqu'un vecteur directeur ne peut pas être $(0, 0)$) est un vecteur directeur de D. L'ensemble recherché est donc la droite d'équation $(x, y) = \lambda(-5, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, privée du point $(0, 0)$.