Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 3 (7 octobre 2024)

Correction

Question 1. *Donnez la négation de la phrase ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

Il existe un nombre entier plus grand ou égal à tous les nombres entiers.

La phrase ci-dessus se traduit par la formule $\phi \equiv \exists a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z} \quad b \leqslant a$.
La négation de la formule ϕ est donnée par $\neg\phi \equiv \forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} \quad b > a$, ce qui se traduit en français par la phrase ci-dessous :

Quel que soit un nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est strictement supérieur.

Question 2. *Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \Rightarrow (x \cdot z \leqslant y \cdot z)$.

(a) Pour prouver que la formule $\varphi_1 \equiv \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1$ est fausse, on prouve que sa négation est vraie. On a que $\neg\varphi_1 \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y \neq 1$.

On choisit $x = 0 \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a que $x \cdot y = 0 \cdot y = 0 \neq 1$.

(b) Pour montrer que la formule $\varphi_2 \equiv \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \Rightarrow (x \cdot z \leqslant y \cdot z)$ est fausse, on montre que sa négation est vraie. On a que $\neg\varphi_2 \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \wedge (x \cdot z > y \cdot z)$.

On choisit $x = 1 \in \mathbb{R}$, $y = 2 \in \mathbb{R}$ et $z = -1 \in \mathbb{R}$.

On a bien que $x \leqslant y$, car $1 \leqslant 2$ et que $x \cdot z > y \cdot z$ car $-1 > -2$.

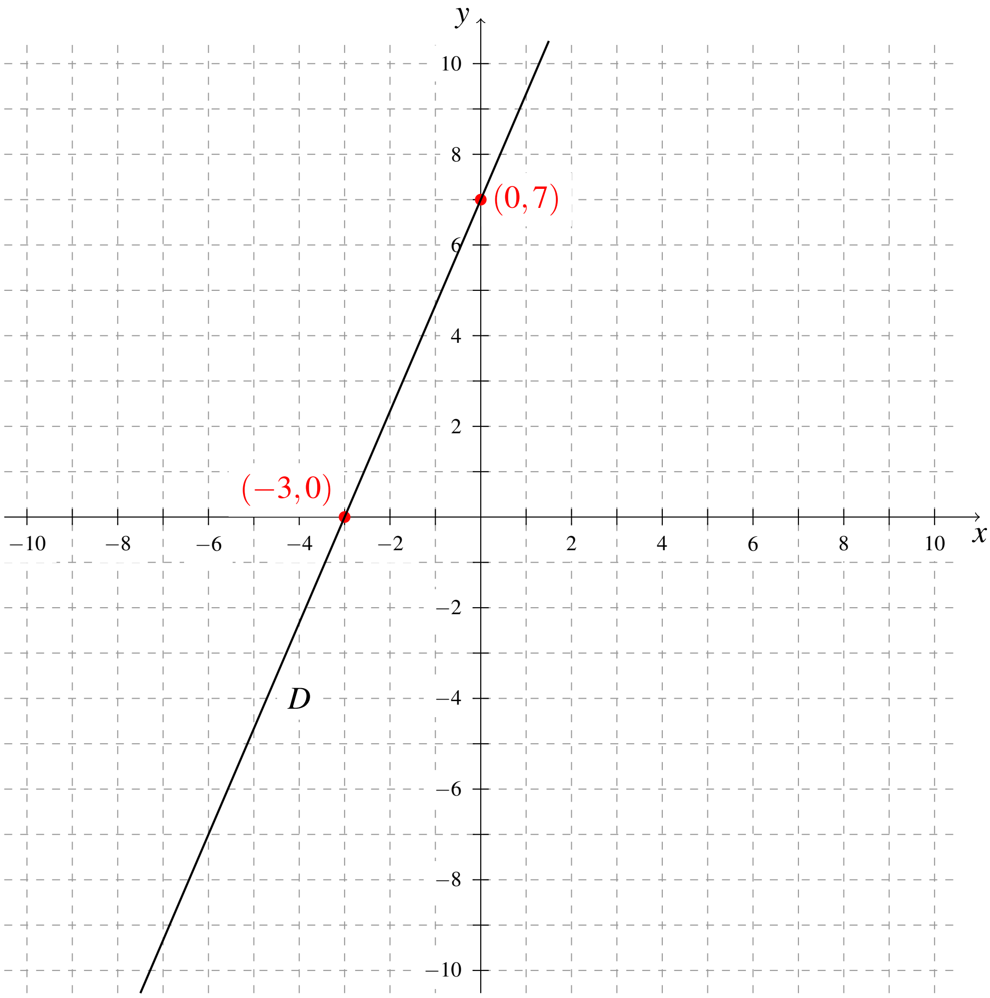
Question 3. *Soit la droite $D \equiv -3y - 2x = 21 - 6y + 5x$. Toutes les réponses aux questions suivantes doivent être justifiées.*

(a) Donnez un vecteur normal de la droite D ainsi que la pente de D.

L'équation de D s'écrit $-3y - 2x + 6y - 5x = 21$, c'est-à-dire $-7x + 3y = 21$. C'est une équation de la forme $ax + by = c$ où $a = -7$, $b = 3$ et $c = 21$. On a vu au cours que (a, b) est un vecteur normal de toute droite d'équation $ax + by = c$ et que si $b \neq 0$ (ce qui est le cas ici), alors la pente de la droite vaut $-\frac{a}{b}$.

On en déduit que $(-7, 3)$ est un vecteur normal de D et que la pente de D vaut $-\frac{(-7)}{3}$, c'est-à-dire $\frac{7}{3}$.

(b) *Représentez la droite D dans le repère ci-dessous.*



Par (a), $D \equiv -7x+3y=21$.
Si $x=0$, alors $y=7$.
Si $y=0$, alors $x=-3$.
On en déduit que la droite D passe par les points $(0,7)$ et $(-3,0)$.

Question 4.

- *Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Définissez dans le cadre ci-dessous « u est la racine carrée de v » :*

$$u^2 = v \text{ et } u \geqslant 0. \tag{1}$$

- *À partir de la définition donnée ci-dessus, prouvez que*

  (a) *quel que soit $x \in \mathbb{R}$, si $\sqrt{x}$ existe, alors $x \geqslant 0$;*
  Supposons qu'il existe un $u \in \mathbb{R}$ tel que u soit la racine carrée de x. Au vu de la définition (1), ceci veut dire que $u^2 = x$ et $u \geqslant 0$. En particulier, on a que $x = u^2 \geqslant 0$ (puisque tous les carrés sont positifs, comme vu au cours).

  (b) $\forall x \in [0, +\infty[, \ \sqrt{x} \geqslant 0$.
  Nous avons vu au cours que, si $x \in [0, +\infty[$, alors $u := \sqrt{x}$ existe. Au vu de la définition (1), $u = \sqrt{x}$ veut dire que $u^2 = x$ et $u \geqslant 0$. Le second membre de cette conjonction affirme que u, la racine carrée de x, est bien positive.

Question 5. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Quel que soit un nombre entier a, si a est impair alors son carré est impair.*

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Quel que soit un nombre entier a, si a est pair alors son cube est impair.*

On note $P(a)$ le prédicat *« a est un nombre pair »* et $Q(a)$ le prédicat *« a est un nombre impair »*.
On a que $P(a) \equiv \exists k \in \mathbb{Z}\ a = 2k$ et $Q(a) \equiv \exists k \in \mathbb{Z}\ a = 2k+1$.

(a) Quel que soit un nombre entier a, si a est impair alors son carré est impair.

On traduit cette affirmation en formule. On obtient $\varphi_1 \equiv \forall a \in \mathbb{Z} \quad Q(a) \Rightarrow Q(a^2)$, ou encore

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad (\exists k_1 \in \mathbb{Z}\ a = 2k_1 + 1) \ \Rightarrow\ (\exists k_2 \in \mathbb{Z}\ a^2 = 2k_2 + 1).$$

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

On suppose que la formule $\exists k_1 \in \mathbb{Z}\ a = 2k_1 + 1$ est vraie.

On doit montrer que cela implique que la formule $\exists k_2 \in \mathbb{Z}\ a^2 = 2k_2 + 1$ est vraie.

On choisit $k_2 = 2k_1^2 + 2k_1 \in \mathbb{Z}$, car $k_1 \in \mathbb{Z}$.

On sait que $a = 2k_1 + 1$.

Donc $a^2 = (2k_1+1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 = 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 = 2k_2 + 1$.

(b) Pour montrer que cette affirmation est fausse, on montre que sa négation est vraie. Afin d'exprimer la négation de cette affirmation, on la traduit d'abord en formule. L'affirmation de départ est équivalente à la formule $\varphi_2 \equiv \forall a \in \mathbb{Z}\ P(a) \Rightarrow Q(a^3)$. La négation de φ_2 est donnée par $\neg\varphi_2 \equiv \exists a \in \mathbb{Z}\ P(a) \wedge \neg Q(a^3) \equiv \exists a \in \mathbb{Z}\ P(a) \wedge P(a^3)$. On doit donc montrer que $\neg\varphi_2$ est vraie.

On choisit $a = 2 \in \mathbb{Z}$.

On doit montrer que a est pair. On choisit $1 \in \mathbb{Z}$ et on peut écrire $a = 2 = 2 \cdot 1$.

Il reste à montrer que a^3 est pair. On choisit $4 \in \mathbb{Z}$ et on peut écrire $a^3 = 8 = 2 \cdot 4$.

Question 6.

(a) *Soit la droite $D \equiv -3x-2y=1$. Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est parallèle à D. Expliquez votre démarche.*

Comme l'équation de D est sous la forme $ax+by=c$, on sait que (a,b) est un vecteur normal de la droite. Ici $a=-3$ et $b=-2$. Donc $(-3,-2)$ est un vecteur normal de D.

Vu que les droites D et D_1 sont parallèles, on en déduit que $(-3,-2)$ sera aussi un vecteur normal de D_1.

Donc

$$D_1 \equiv -3x-2y=c \tag{2}$$

Dire que l'ordonnée à l'origine de D_1 vaut -5 signifie que la droite D_1 passe par le point $(0,-5)$.

Ainsi, on trouve la valeur de c en remplaçant dans (2) x par 0 et y par -5 :

$$-3\cdot 0-2\cdot(-5)=c.$$

Donc $c=10$.

En conclusion, $D_1 \equiv -3x-2y=10$.

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point $(4,-2)$.*

On a vu au cours qu'une équation cartésienne d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est de la forme $y=\alpha$, pour un certain $\alpha\in\mathbb{R}$. Comme le point donné est d'ordonnée -2, on en déduit que $D_2 \equiv y=-2$.

Question 7.

Écrivez l'ensemble suivant sous la forme d'une union d'intervalles :

$$\left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2x-1}\right\} = \boxed{\,]-\infty,0]\cup]\tfrac{1}{2},3]\,}.$$

Moins il y a d'intervalles, mieux c'est. Détaillez ci-dessous les calculs qui valident votre réponse. N'oubliez pas d'en justifier les différentes étapes !

La question revient à résoudre l'inéquation

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2x-1}. \tag{3}$$

Commençons par regarder les conditions d'existence. Comme les dénominateurs ne peuvent pas être nuls , il faut que $x^2+1\neq 0$ et $2x-1\neq 0$. Or, $x^2+1\geqslant 1>0$ et donc ceci ne donne pas une condition d'existence. La seule condition d'existence est donc $2x-1\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq\frac{1}{2}$. Distinguons deux cas.

- Si $x > \frac{1}{2}$, en multipliant les deux membres de (3) par $(x^2+1)(2x-1) > 0$, et en développant on a $2x^2-3x+1 \leq x^2+1$, ou encore, après simplification, $x(x-3) \leq 0$. Cette dernière inéquation a pour solutions $x \in [0,3]$. Cependant, ces solutions ne sont solutions de l'inéquation (3) que si elles vérifient la condition de ce cas, à savoir $x > \frac{1}{2}$. Dès lors, les solutions de (3) trouvées dans ce cas sont $x \in [0,3] \cap]\frac{1}{2},+\infty[=]\frac{1}{2},3]$.
- Si $x < \frac{1}{2}$, on a $(x^2+1)(2x-1) < 0$ et donc multiplier les deux membres par cette quantité renverse le sens de l'inégalité. Autrement dit, (3) est équivalent à $2x^2-3x+1 \geq x^2+1$ ou après simplification, $x(x-3) \geq 0$. Les solutions de cette dernière inégalité sont $x \in]-\infty,0] \cup [3,+\infty[$. En tenant compte de la condition de ce cas, les solutions de (3) trouvées ici sont
$$x \in \big(]-\infty,0] \cup [3,+\infty[\big) \cap \Big]-\infty,\frac{1}{2}\Big[=]-\infty,0].$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est l'union des ensembles de solutions trouvés dans chacun des cas, à savoir $]-\infty,0] \cup]\frac{1}{2},3]$.