

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(14 octobre 2024)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles. Ceci doit être fait *pendant* la durée impartie au test.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, montre connectée,...) n'est autorisé. Si vous les avez avec vous, ils doivent être dans votre sac (en mode silencieux).
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. N'écrivez *pas* votre réponse sur une feuille d'une *autre question* !

Question 1. Donnez en extension l'ensemble D ci-dessous. Expliquez votre démarche.

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \leq 9) \wedge (n \text{ est un multiple de } 3 \Rightarrow n + 1 \text{ est pair})\}.$$

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : Faux : La droite $D_1 \equiv -3x + 4y = 10$ est parallèle à la droite D_2 passant par les points $(1, \frac{1}{2})$ et $(3, -1)$.

(b) Vrai : Faux : Quel que soit le réel λ , le système $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = -\lambda \end{cases}$, où x et y sont les inconnues, a toujours au moins une solution.

(c) Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv 6x + 9y = 5$ et $D_2 \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+8}{2}$ sont perpendiculaires.

Question 3.

/3

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissez la valeur absolue de x :

$|x| =$

Si cette définition est absente ou incorrecte, le reste de la question ne sera pas corrigé.

(b) Prouvez que $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4.

/4

(a) Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Donnez la définition de f est injective.

(b) Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Donnez la définition de f est surjective.

(c) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, ce point ne sera pas corrigé.

Vrai : Faux : La fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ est injective, mais elle n'est pas surjective.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5.

/7

(a) Prouvez que $\frac{11 - \sqrt{5}}{2} < 5$. Vos calculs doivent être rigoureux et justifiés.

(b) Résolvez l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}-1} \leq \frac{1}{x-6}. \quad (1)$$

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(14 octobre 2024)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez.

/4

(a) Vrai : Faux : $\{x \in \mathbb{R} \mid x^7 - x^5 + x^3 + 1 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^7 - y^5 + y^3 + y = 0\}$.

(b) Vrai : Faux : $\{a \in \mathbb{Z} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ a = 12k_1\} \subseteq \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ b = 3k_2\}$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Soit le système

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3\lambda x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

/4

où λ est un paramètre réel.

Résolvez ce système lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$ dans le plan \mathbb{R}^2 .