Mathématiques Élémentaires

Test n$^\circ$ 4 (14 octobre 2024) **Correction**

Question 1. *Donnez en extension l'ensemble D ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \leqslant 9) \wedge (n \text{ est un multiple de 3 } \Rightarrow n+1 \text{ est pair})\}.$$

Voir la correction de la question 1 du test 5 du 17-10-2022.

Question 2. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.*

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *La droite* $D_1 \equiv -3x+4y = 10$ *est parallèle à la droite* D_2 *passant par les points* $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ *et* $(3, -1)$.

Voir la correction du test 5, 16 octobre 2023, question 3.

Au point (b), le déterminant du système vaut ici $\lambda^2 + 1$. Si non, le raisonnement est identique.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Quel que soit le réel* λ, *le système* $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = -\lambda \end{cases}$, *où x et y sont les inconnues, a toujours au moins une solution.*

(c) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☐ *Les droites* $D_1 \equiv 6x+9y = 5$ *et* $D_2 \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+8}{2}$ *sont perpendiculaires.*

Question 3.

(a) *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Définissez la valeur absolue de x :*

$$|x| = \boxed{\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

(b) *Prouvez que* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = x^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Divisons l'argument en deux cas selon que $x \geq 0$ ou $x < 0$ et, pour chacun de ces cas, montrons que $|x|^2 = x^2$.

- Premier cas : $x \geq 0$. Par définition, $|x| = x$ et donc, en élevant les deux membres au carré, $|x|^2 = x^2$.
- Second cas : $x < 0$. De nouveau, par définition de la valeur absolue, $|x| = -x$. En élevant les deux membres au carré, on a :
$$|x|^2 = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2.$$

Question 4.

(a) *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Donnez la définition de f est injective.*

(b) *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Donnez la définition de f est surjective.*

(c) *Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = 2x+1$ est injective, mais elle n'est pas surjective.*

(a) f est injective si et seulement si $\forall x_1 \in \mathrm{Dom}(f)\ \forall x_2 \in \mathrm{Dom}(f) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Une définition équivalente de l'injectivité est donnée ci-dessous.

f est injective si et seulement si $\forall x_1 \in \mathrm{Dom}(f)\ \forall x_2 \in \mathrm{Dom}(f) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(b) f est surjective si et seulement si $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = y$.

(c) On va montrer que f est injective et ensuite qu'elle n'est pas surjective.

- On montre d'abord que f est injective. On utilise la deuxième variante de la définition ci-dessus. On remarque que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{Z}$.
  Soit $x_1 \in \mathbb{Z}$. Soit $x_2 \in \mathbb{Z}$.
  On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$, ce qui signifie que $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$. On a donc que $2x_1 = 2x_2$. Ce qui implique que $x_1 = x_2$.
- On montre maintenant que f n'est pas surjective. Pour cela, on doit montrer que la négation de la définition de la surjectivité est vraie.
  f n'est pas surjective si et seulement si $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \neq y$.
  On choisit $y = 0 \in \mathbb{Z}$.
  Soit $x \in \mathbb{Z}$.
  On doit prouver que $2x+1 \neq 0$. On remarque que $2x+1$ est un nombre impair quel que soit $x \in \mathbb{Z}$, alors que 0 est un nombre pair. On a donc bien que, quel que soit $x \in \mathbb{Z}$, $2x+1 \neq 0$.

Question 5.

(a) *Prouvez que* $\dfrac{11-\sqrt{5}}{2} < 5$. *Vos calculs doivent être rigoureux et justifiés.*

En multipliant les deux membres de l'inégalité par 2, on obtient l'inégalité équivalente $11 - \sqrt{5} < 10$. Par compatibilité de l'ordre avec l'addition, ceci se transforme en $1 = 11 - 10 < \sqrt{5}$. Comme les deux membres sont positifs, on peut les élever au carré et obtenir l'inégalité équivalente $1 < 5$ qui est vraie.

(b) Résolvez l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}-1} \leqslant \frac{1}{x-6}. \tag{1}$$

Commençons par regarder les conditions d'existence. Elles sont :

(a) $x-4 \geq 0$ car on en prend la racine carrée,

(b) $\sqrt{x-4}-1 \neq 0$ car il se trouve au dénominateur,

(c) $x-6 \neq 0$ car il se trouve au dénominateur.

La condition (a) se réécrit $x \geq 4$ et la (c) dit $x \neq 6$.
Pour (b), en anticipant sur les arguments ci-après, faisons un tableau de signe de $\sqrt{x-4}-1$. Pour cela, résolvons $\sqrt{x-4}-1 > 0$ (les cas $= 0$ et < 0 se trouvent en répétant les calculs mutatis mutandis). On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4}-1 > 0 &\iff \sqrt{x-4} > 1 \\ &\iff x-4 > 1 \quad \text{car les deux membres sont positifs} \\ &\iff x > 5. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

x	4		5	
$\sqrt{x-4}-1$	-1	$-$	0	$+$

En conclusion, les conditions d'existence sont

$$x \in [4,+\infty[\setminus \{5,6\}.$$

Passons maintenant à la résolution proprement dite de (1).

- Si les deux dénominateurs sont positifs (pour $x \geq 6$) ou négatifs (pour $x < 5$), multiplier par le produit $(\sqrt{x-4}-1)(x-6) > 0$ ne modifie pas le sens de l'inégalité : on obtient donc l'inégalité équivalente :

  $$x-6 \leq \sqrt{x-4}-1$$

  ou encore

  $$x-5 \leq \sqrt{x-4}.$$

  Si $x < 5$, le membre de gauche est négatif et donc l'inégalité est vérifiée (vu que $\sqrt{x-4} \geq 0$). Si $x \geq 6$ (vu les conditions du cas), on peut élever au carré :

  $$(x-5)^2 \leq \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = x-4.$$

  Après simplification, cette inégalité devient :

  $$x^2-11x+29 \leq 0.$$

  Le tableau de signe du membre de gauche est

x		$\frac{11-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{11+\sqrt{5}}{2}$	
$x^2-11x+29$	$+$	0	$-$	0	$+$

(On se rappelle que le signe en dehors des racines est le signe du coefficient de x^2.) Au vu du point (a) et par des calculs similaires, on a que

$$\frac{11-\sqrt{5}}{2} < 6 < \frac{11+\sqrt{5}}{2}.$$

En tenant compte qu'on travaille avec $x \geq 6$, les solutions trouvées sont $x \in \left]6, \frac{11+\sqrt{5}}{2}\right]$.

- Reste le cas où $\sqrt{x-4}-1 > 0$ et $x-6 < 0$, c'est-à-dire $x \in]5,6[$. Dans ce cas, (1) n'a pas de solution, car le membre de gauche, positif, ne peut être inférieur au membre de droite, négatif.

En conclusion, l'ensemble des solutions de (1) est l'union des solutions trouvées dans chacun des cas de la discussion précédente, à savoir :

$$[4,5[\cup\left]6, \frac{11+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Question 6. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez.*

(a) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^7 - x^5 + x^3 + 1 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^7 - y^5 + y^3 + y = 0\}$.

(b) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ $\{a \in \mathbb{Z} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad a = 12k_1\} \subseteq \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad b = 3k_2\}$.

(a) On note $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^7 - x^5 + x^3 + 1 = 0\}$ et $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y^7 - y^5 + y^3 + y = 0\}$. Pour montrer que l'affirmation est fausse, on doit montrer que la négation est vraie.

Pour rappel, $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Nous avons donc que $A \neq B$ si et seulement si $A \not\subseteq B$ ou $B \not\subseteq A$. On va prouver que $B \not\subseteq A$.

Pour rappel $B \subseteq A$ si et seulement si $\forall x \; x \in B \Rightarrow x \in A$. Nous avons donc que $B \not\subseteq A$ si et seulement si $\exists x \; x \in B \wedge x \notin A$.

On choisit $x = 0$.

On a bien que $x \in B$, car $0^7 - 0^5 + 0^3 + 0 = 0$.

On a également que $x \notin A$, car $0^7 - 0^5 + 0^3 + 1 = 1 \neq 0$.

(b) On note $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad a = 12k_1\}$ et $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad b = 3k_2\}$.

Pour montrer que $A \subseteq B$, on doit montrer que $\forall x \; x \in A \Rightarrow x \in B$.

Soit x.

On suppose que $x \in A$. On sait donc que $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x = 12k_1$ est vraie.

On doit montrer que $x \in B$. On doit donc montrer que $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad x = 3k_2$ est vraie.

On choisit $k_2 = 4k_1 \in \mathbb{Z}$, car $k_1 \in \mathbb{Z}$.

On a bien que $x = 12k_1 = 3 \cdot 4k_1 = 3k_2$.

Question 7. *Soit le système*

$$\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 3\lambda x-\lambda y=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.
Résolvez ce système lorsque $\lambda=0$ et lorsque $\lambda=1$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Voir la correction du test 5, 16 octobre 2023, question 5.