Mathématiques Élémentaires

Test n° 5 (21 octobre 2024) **Correction**

Question 1. *Calculez explicitement les trois expressions ci-dessous. Détaillez vos calculs.*

(a) $\sum_{k=1}^{5} 1 = 1+1+1+1+1 = 5.$

(b) $\sum_{t=0}^{7} t = 0+1+2+3+4+5+6+7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$

(c) $\sum_{j=1}^{9} (-1)^j = -1+1-1+1-1+1-1+1-1 = -1.$

Question 2. *Soient le plan $\alpha \equiv z = x$ et la droite $D \equiv (x,y,z) = (-1+5\lambda, 2\lambda, -7-\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) Donnez un point appartenant au plan α.

On a $(1,0,1) \in \alpha$. En effet, $\alpha \equiv 0 \cdot y + z = x$. Si on remplace dans cette équation x par 1, y par 0 et z par 1, on a $0 \cdot 0 + 1 = 1$, ce qui est vrai.

(b) Donnez une équation paramétrique de la droite D_1 parallèle à D et passant par le point $(3,4,1)$.

On a $D \equiv (x,y,z) = (-1,0,-7) + \lambda(5,2,-1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Un vecteur directeur de D est donc $(5,2,-1)$. Comme les droites D et D_1 sont parallèles, c'est aussi un vecteur directeur de D_1. Donc $D_1 \equiv (x,y,z) = (3,4,1) + \mu(5,2,-1)$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 perpendiculaire au plan α et passant par l'origine du repère.

On a $\alpha \equiv x - z = 0$. Un vecteur normal de α est donc $(1,0,-1)$. Comme D_2 est perpendiculaire à α, ce vecteur sera aussi un vecteur directeur de D_2. Donc $D_2 \equiv (x,y,z) = \lambda(1,0,-1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 3.

(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donnez la définition de f est une application.*

(b) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donnez la définition de f est injective.*

(c) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donnez la définition de f est strictement croissante.*

(d) *Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.*

Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Quel que soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, si f est injective, alors f est strictement croissante.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application ssi $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) f est injective si et seulement si $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(c) f est strictement croissante si et seulement si $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(d) Pour montrer que l'affirmation est fausse, on montre que sa négation est vrai. La négation de l'affirmation de départ est donnée ci-dessous.

Il existe une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est injective et f n'est pas strictement croissante.

On choisit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$.

- On a bien que f est une application car $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- On va montrer que f est injective.
  Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. Soit $x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$, c'est-à-dire que $-x_1 = -x_2$. Ce qui implique que $x_1 = x_2$.
- Il reste à prouver que f n'est pas strictement croissante. Pour cela on considère la négation de la définition de f est strictement croissante, i.e.

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \land f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

  On choisit $x_1 = 1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 = 2 \in \mathbb{R}$. On a bien que $x_1 < x_2$, car $1 < 2$. On a également que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, car $-1 \geqslant -2$.

Question 4. *Résolvez l'inéquation*

$$\frac{1}{\sqrt{|x|+4}-5} \geqslant \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Commençons par les conditions d'existence. Elles sont au nombre de trois :

(a) $|x|+4 \geqslant 0$ pour que la racine carrée existe ;

(b) $\sqrt{|x|+4}-5 \neq 0$ pour que la fonction de gauche fasse sens ;

(c) $x \neq 0$ pour que la fonction de droite existe.

La condition (a) est toujours satisfaite puisque, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$ et donc $|x|+4 \geqslant 4 > 0$. Pour (b), en anticipant sur la suite de la résolution, déterminons un tableau de signe de $\sqrt{|x|+4}-5$. Pour cela, résolvons $\sqrt{|x|+4}-5 \geqslant 0$ (on en déduit facilement les cas $= 0$ et < 0). On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x|+4}-5 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{|x|+4} \geqslant 5 \\
&\Leftrightarrow \quad |x|+4 \geqslant 25 \qquad \text{car les deux membres sont positifs} \\
&\Leftrightarrow \quad |x| \geqslant 21 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant -21 \text{ ou } x \geqslant 21 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty,-21\right] \cup \left[21,+\infty\right[.
\end{aligned}$$

On en déduit donc

x		-21		21	
$\sqrt{\lvert x\rvert+4}-5$	$+$	0	$-$	0	$+$

Au vu de ce tableau de signe et en tenant compte de (c), les conditions d'existence sont

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-21, 0, 21\}.$$

Résolvons maintenant (1).

- Si $x \in \left]-21,0\right[\cup \left]21,+\infty\right[$, alors les deux dénominateurs sont tous les deux négatifs ou tous les deux positifs. En multipliant les deux membres de (1) par $\left(\sqrt{|x|+4}-5\right) \cdot x > 0$, on obtient $x \geqslant \sqrt{|x|+4}-5$ ou encore $\sqrt{|x|+4} \leqslant x+5$. Si $x+5 < 0$, il n'y a pas de solution (vu que la racine carrée est $\geqslant 0$, elle ne peut être inférieure à un nombre strictement négatif). Si $x+5 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in \left[-5,0\right[\cup \left]21,+\infty\right[$ au vu des conditions du cas, on peut élever les deux membres au carré et obtenir l'inégalité équivalente $|x|+4 \leqslant (x+5)^2$. Après développement, celle-ci devient $x^2+10x-|x|+21 \geqslant 0$.
  - Si $x \in \left[-5,0\right[$, $|x| = -x$, l'inéquation devient $x^2+11x+21 \geqslant 0$. Le tableau de signe de ce polynôme est

x		$\frac{-11-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{-11+\sqrt{37}}{2}$	
$x^2+11x+21$	$+$	0	$-$	0	$+$

    Comme $\frac{-11-\sqrt{37}}{2} < -5 < \frac{-11+\sqrt{37}}{2} < 0$, les solutions trouvées pour ce cas sont

    $$x \in \left[\frac{-11+\sqrt{37}}{2}, 0\right[.$$

- ▸ Si $x \in]21,+\infty[$, $|x| = x$ et l'inéquation devient $x^2+9x+21 \geqslant 0$. Comme $\Delta = 9^2 - 4\cdot 21 < 0$, le polynôme *n'a pas de racines*. Par conséquent, son signe est celui du coefficient de x^2 quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Ici on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+9x+21 > 0$. Dès lors, tous les $x \in]21,+\infty[$ sont solutions.

- Si $x \in]-\infty,-21[$, le membre de gauche de (1) est positif ou nul, alors que son membre de droite est strictement négatif. L'inégalité (1) est donc automatiquement satisfaite. Autrement dit, tous les $x \in]-\infty,-21[$ sont solution.
- Si $x \in]0,21[$, le membre de gauche de (1) est strictement négatif alors que son membre de droite est strictement positif. Dans ce cas, (1) ne peut être vraie. Il n'y a donc aucune solution de (1) dans $]0,21[$.

En conclusion, en collectant les solutions trouvées à chacun des cas ci-dessus, on a que l'ensemble des solutions de (1) est :

$$]-\infty,-21[\cup\left[\frac{-11+\sqrt{37}}{2},0\right[\cup]21,+\infty[.$$

Question 5. *Prouvez, par induction, que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, n^2+3n+2 est un nombre pair.*

On note $P(n)$ le prédicat « n^2+3n+2 est un nombre pair ».

- **Cas de base.** On doit prouver que $P(0)$ est vraie, i.e. que 2 est un nombre pair, ce qui est clairement vrai car $2 = 2\cdot 1$ et $1 \in \mathbb{Z}$.

- **Cas général.** On doit prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

  On suppose donc que $P(n)$ est vrai, i.e. $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad n^2+3n+1 = 2k_1$.

  On doit montrer que $P(n+1)$ est vrai, i.e. $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad (n+1)^2+3(n+1)+1 = 2k_2$.

  On va développer l'expression ci-dessus.

$$\begin{aligned}(n+1)^2+3(n+1)+1 &= n^2+2n+1+3n+3+1\\ &= (n^2+3n+1)+(2n+4)\\ &= 2k_1+2(n+2) && \text{Hypothèse d'induction}\\ &= 2(k_1+n+2)\end{aligned}$$

  On choisit $k_2 = k_1+n+2 \in \mathbb{Z}$, car $n \in \mathbb{N}$ et $k_1 \in \mathbb{Z}$.

  On a donc bien que $(n+1)^2+3(n+1)+1 = 2k_2$.