

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles. Ceci doit être fait *pendant* la durée impartie au test.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, montre connectée,...) n'est autorisé. Si vous les avez avec vous, ils doivent être dans votre sac (en mode silencieux).
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. N'écrivez *pas* votre réponse sur une feuille d'une *autre question* !
- Veuillez écrire votre email (de préférence celui de l'UMONS) ci-dessous. Notez que vous ne recevrez ni vos points ni vos copies si celui-ci est absent ou illisible.

\_\_\_\_\_@\_\_\_\_\_

Question 1.

/5

(a) Complétez les propriétés suivantes de l'ordre  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$ .

(i) Réflexivité : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq x$ ,

(ii) Antisymétrie : pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

(iii) Transitivité : pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ .

(iv) Totalité : pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

(v) Compatibilité avec l'addition :

(vi) Compatibilité avec la multiplication :

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Question 1 (continued).

- (b) À partir des règles énoncées au point (a), prouvez que si  $u \in \mathbb{R}$  vérifie  $u > 0$ , alors  $1/u > 0$ . La qualité de votre rédaction est importante. En particulier, il est attendu que chaque application d'une règle du point (a) soit clairement identifiée.

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Question 2. Soit  $u = (-4, 3)$  et  $v = (-1, -2)$ . Calculez

/4

■  $\frac{v}{2} - 3u =$

■  $\|-3u\| =$

■ la distance entre  $u$  et  $v$ .

■  $(-3u \mid -v) =$

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

## Question 3.

/5

(a) Donnez la table de vérité de  $P \Rightarrow Q$ .

*(Si la table de vérité est incorrecte, cette question ne sera pas corrigée.)*

(b) Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une lettre sur l'autre, sont disposées à plat sur une table. Les faces visibles sont les suivantes : 4, 5, A, D. Vous devez vous assurer que la règle suivante est vraie: **Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face.** Pour ce faire, vous devez retourner un minimum de cartes. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(i) True:  False:  Il faut retourner la carte 4.

(ii) True:  False:  Il faut retourner la carte 5.

(iii) True:  False:  Il faut retourner la carte A.

(iv) True:  False:  Il faut retourner la carte D.

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Question 4. Soit  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ .

/4

(a) Complétez les phrases suivantes :

$v = 0$  ssi

$v \neq 0$  ssi

*Si une des réponses est incorrecte ou manquante, le reste de la question ne sera pas corrigé.*

(b) Soit  $u \in \mathbb{R}^2$  le vecteur défini par  $u = (\lambda^2 + 1, 0)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrez que quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , on a toujours  $u \neq 0$ . Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Question 5.

/6

(a) Donnez la définition d'une tautologie.

(b) Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux formules. Donnez la définition de  $\varphi_1$  est équivalente à  $\varphi_2$ .

(c) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

**(Si la réponse est incorrecte, ou si l'une des définitions demandées ci-dessus est absente ou erronée, la question ne sera pas corrigée.)**

True:  False:  La **négation** de la formule  $P \Rightarrow Q$  est équivalente à la formule  $\neg P \Rightarrow \neg Q$ .

# Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Name: \_\_\_\_\_

Firstname: \_\_\_\_\_

Section: \_\_\_\_\_

Question 6. Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Montrez que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (1)$$

Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

/ 4