

Mathématiques Élémentaires

Test no 1

(22 septembre 2025)

Correction

Question 1.

(a) Complétez les propriétés suivantes de l'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

(i) Réflexivité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,

(ii) Antisymétrie : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

(iii) Transitivité : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

(iv) Totalité : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(v) Compatibilité avec l'addition :

pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

(vi) Compatibilité avec la multiplication :

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$.

(b) À partir des règles énoncées au point (a), prouvez que si $u \in \mathbb{R}$ vérifie $u > 0$, alors $1/u > 0$. La qualité de votre rédaction est importante. En particulier, il est attendu que chaque application d'une règle du point (a) soit clairement identifiée.

Tout d'abord, rappelons que, par définition, $u \cdot \frac{1}{u} = 1$. Dès lors, $\frac{1}{u} \neq 0$ car sinon $u \cdot \frac{1}{u} = 0 \neq 1$.

Il reste à montrer que $1/u \geq 0$. Vu que l'ordre est total, on a forcément que

$$\frac{1}{u} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u} \leq 0.$$

Nous allons montrer ci-dessous que $1/u \leq 0$ mène à une contradiction. Cette propriété est donc fausse et la seule possibilité est que $1/u \geq 0$.

Supposons que $1/u \leq 0$ et déduisons-en une contradiction. En ajoutant $-1/u$ aux deux membres de cette inégalité, nous avons, au vu de la compatibilité avec l'addition,

$$0 = \frac{1}{u} - \frac{1}{u} \leq 0 - \frac{1}{u} = -\frac{1}{u},$$

c'est-à-dire que $-1/u \geq 0$. Cette dernière inégalité, l'hypothèse $u > 0$ (qui implique $u \geq 0$) et la compatibilité avec la multiplication impliquent :

$$-1 = u \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) \geq 0.$$

En ajoutant 1 aux deux membres de cette inégalité, on a $1 \leq 0$. Or on a vu que $1 \geq 0$. Ces deux dernières inégalités impliquent à cause de l'asymétrie que $1 = 0$, ce qui est la contradiction recherchée.

Question 2. Soit $u = (-4, 3)$ et $v = (-1, -2)$. Calculez

■ $\frac{v}{2} - 3u$

Voir la correction du test 2, 26 Septembre 2022, question 4.

■ $\|-3u\|$

On a,

$$\begin{aligned} \|-3u\| &= \|-3(-4, 3)\| && \text{par définition de } u \\ &= \|(12, -9)\| && \text{par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel} \\ &= \sqrt{12^2 + (-9)^2} && \text{par définition de la norme d'un vecteur} \\ &= \sqrt{144 + 81} \\ &= \sqrt{225} \\ &= 15 \end{aligned}$$

■ la distance entre u et v .

Voir la correction du test 2, 26 Septembre 2022, question 4.

■ $(-3u \mid -v)$

On a,

$$\begin{aligned} (-3u \mid -v) &= (-3 \cdot (-4, 3) \mid -(-1, -2)) && \text{par définition de } u \text{ et } v \\ &= ((12, -9) \mid (1, 2)) && \text{par définition de la multiplication} \\ &&& \text{d'un vecteur par un réel} \\ &= 12 \cdot 1 + (-9) \cdot 2 && \text{par définition du produit scalaire} \\ &= 12 - 18 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Question 3.

(a) Donnez la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

(b) Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une lettre sur l'autre, sont disposées à plat sur une table. Les faces visibles sont les suivantes : 4, 5, A, D. Vous devez vous assurer que la règle suivante est vraie: **Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face.** Pour ce faire, vous devez retourner un minimum de cartes. Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(i) True: ☐ False: ☐ Il faut retourner la carte 4.

(ii) True: ☐ False: ☐ Il faut retourner la carte 5.

(iii) True: ☐ False: ☐ Il faut retourner la carte A.

(iv) True: ☐ False: ☐ Il faut retourner la carte D.

(a) La table de vérité de $P \Rightarrow Q$ est donnée par:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(b) La règle **Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face** peut être traduite par une formule de la forme $P \Rightarrow Q$ avec P qui représente **avoir un D sur une face** et Q qui représente **avoir un 5 sur une face**.

(i) True: ☒ False: ☐ Il faut retourner la carte 4.

Si on voit un 4, c'est que $Q \equiv 0$. On est donc dans la deuxième ou la quatrième ligne de la table de vérité. Il nécessaire de retourner la carte pour savoir si $P \equiv 1$ (et donc l'implication fausse); ou si $P \equiv 0$ (et donc l'implication vraie).

(ii) True: ☐ False: ☒ Il faut retourner la carte 5.

Si on voit un 5, c'est que $Q \equiv 1$. On est donc dans la première ou la troisième ligne de la table de vérité. Dans les deux cas, l'implication est vraie.

(iii) True: ☐ False: ☒ Il faut retourner la carte A.

Si on voit un A, c'est que $P \equiv 0$. On est donc dans la troisième ou la quatrième ligne de la table de vérité. Dans les deux cas, l'implication est vraie (car la prémisse est fausse).

(iv) True: ☒ False: ☐ Il faut retourner la carte D.

Si on voit un D, c'est que $P \equiv 1$. On est donc dans la première ou la deuxième ligne de la table de vérité. Il nécessaire de retourner la carte pour savoir si $Q \equiv 1$ (et donc l'implication vraie); ou si $Q \equiv 0$ (et donc l'implication fausse).

Question 4. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Complétez les phrases suivantes :

$v = 0$ ssi

$v \neq 0$ ssi

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ le vecteur défini par $u = (\lambda^2 + 1, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrez que quelle que soit la valeur de λ , on a toujours $u \neq 0$. Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Voir la correction du test 2, 26 Septembre 2022, question 5.

Question 5.

(a) Donnez la définition d'une tautologie.

(b) Soient φ_1 et φ_2 deux formules. Donnez la définition de φ_1 est équivalente à φ_2 .

(c) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

True: ☐ False: ☐ La **négation** de la formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

(a) Donnez la définition d'une tautologie.

Une tautologie est une formule qui est toujours vraie.

(b) Soient φ_1 et φ_2 deux formules. Donnez la définition de φ_1 est équivalente à φ_2 .

Les formules φ_1 et φ_2 sont équivalentes si et seulement si $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ est une tautologie.

(c) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

True: ☐ False: ☒ La **négation** de la formule $P \Rightarrow Q$ est équivalente à la formule $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

On va montrer que la formule $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ n'est pas une tautologie. Pour ce faire, on construit sa table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0

On constate que la colonne de la table de vérité de $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ comporte au moins un zéro (en première ligne), cette formule n'est donc pas une tautologie.

Question 6. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrez que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (1)$$

Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

Voir la correction du test 3, 3 octobre 2022, question 7.